1 Wektorowe operatory różniczkowe

Czas na powtórkę i wstęp z okropnej notacji fizycznej.

$$\vec{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$$

$$\vec{f}(x,y,z) = f_x\hat{i} + f_y\hat{j} + f_z\hat{k}$$

1.1 Gradient

$$\nabla\vec{f}(x,y,z) = \hat{i}\frac{\partial f}{\partial x}(x,y,z) + \hat{j}\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,z) + \hat{k}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

1.2 Dywergencja

$$\nabla \cdot \vec{f} = \frac{\partial f_x}{\partial x} + \frac{\partial f_y}{\partial y} + \frac{\partial f_z}{\partial z} \in \mathbb{R}$$

Mierzy jak bardzo pole wektorowe rozbiega się w danym punkcie.

1.3 Rotacja

$$\nabla \times \vec{f}(x,y,z) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_x(x,y,z) & f_y(x,y,z) & f_z(x,y,z) \end{vmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

Mierzy jak bardzo pole wektorowe kręci się dookoła danego punktu.

1.4 Zależności

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{f}) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0$$

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{f}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{f}) - \Delta\vec{f}$$

1.5 Laplasjan

$$\nabla \cdot (\nabla f(x,y,z)) \equiv \nabla^2 f(x,y,z) = \Delta f(x,y,z) = \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 y}(x,y,z) + \frac{\partial^2 f}{\partial^2 z}(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

1.6 Iloczyn wektorowy

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

1.7 Twierdzenie Gaussa-Ostrogradskiego

$$\int_V \nabla \cdot \vec{f} dxdydz = \oint_A \vec{f} \cdot d\vec{A}$$

Całka po objętości V z dywergencji, jest równa całce z powierzchni otaczającej daną objętość.

1.8 Twierdzenie Stokesa

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{l} = \int_A (\nabla \times \vec{f}) \cdot d\vec{A}$$

gdzie C to dowolna krzywa, a A to powierzchnia dowolnego otwartego obszaru ograniczonego krzywą C.

2 Równania Maxwella

2.1 Prawo Faradaya

$$\oint_L \vec{E}\vec{dl} = -\frac{\partial \phi_B}{\partial t} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\vec{ds}$$

gdzie $\vec{E}$ to natężenie pola elektrycznego, L to dowolna zamknięta krzywa, ϕ_B to strumień indukcji przez powierzchnię S rozpinającą L, a $\vec{B}$ to indukcja pola magnetycznego.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

2.2 Prawo Amper'a

$$\oint_L \vec{B}\vec{dl} = \mu I + \mu\epsilon\frac{\partial \phi_E}{\partial t} = \mu I + \mu\epsilon\frac{d}{dt}\int_S \vec{E}\vec{ds}$$

gdzie I to całkowity prąd elektryczny przepływający przez dowolną powierzchnię S rozpinającą L, μ i ϵ to stałe.

$$\nabla \times \vec{B} = \mu\vec{g} + \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

gdzie $\vec{g}$ to gęstość prądu elektrycznego.

2.3 Prawo Gaussa

$$\epsilon\phi_E = \epsilon\oint_S \vec{E}\vec{ds} = q$$

gdzie ϕ_E to strumień pola elektrycznego przez dowolną zamkniętą powierzchnię S, a q to całkowity ładunek zawarty wewnątrz tej powierzchni.

$$\epsilon\nabla \cdot \vec{E} = \rho$$

gdzie ρ to gęstość ładunku elektrycznego.

2.4 Prawo Gaussa dla magnetyzmu

$$\phi_B = \oint_S \vec{B}\vec{ds} = 0$$

$$\nabla \times \vec{B} = 0$$

3 Wektor Poyntinga

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}(\vec{E} \times \vec{B})$$

4 Siła Lorentza

$$\vec{F} = q\vec{E} + q(\vec{v} \times B)$$

5 Funkcje falowe

Funkcja falowa, ma postać ogólną:

$$f(x,t) = A\sin(kx + \omega t)$$

lub

$$f(x,t) = Ae^{i(kz-\omega t)}$$

$$\omega = 2\pi f \quad \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{s}}\right]$$

$$f = 1/T \quad [\mathrm{Hz}]\,\mathrm{lub}\,\left[\mathrm{s}^{-1}\right]$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad \left[\frac{\mathrm{rad}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$\lambda = \frac{v}{f} \quad [\mathrm{m}]$$

$$v = f\lambda = \frac{\omega}{k} \quad \left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$$