

Spis treści

1	Logika	1
1.1	Prawa logiki	1
1.1.1	Prawa łączności	1
1.1.2	Prawa przemienności	2
1.1.3	Prawa impotentności	2
1.1.4	Prawo rozdzielności	2
1.1.5	Prawo de Morgana	2
1.1.6	Prawo podwójnej negacji	2
1.1.7	Prawo transpozycji	2
1.1.8	Prawo eksportacji-importacji	2
1.2	Wnioskowanie	2
1.2.1	Reguły wnioskowania	2
1.3	Przekształcenia	3
1.4	Postaci normalne	3
1.5	Sekwenty	3
1.6	Kwantyfikatory	3
2	Teoria Mnogości	3
2.1	Zbiory	3
2.2	Relacje	4
2.2.1	Złożenie relacji	4
2.2.2	Rodzaje relacji	4
2.2.3	Relacja równoważności	4
2.2.4	Relacje porządkujące	4
2.2.5	Zbiory uporządkowane	5
2.3	Kresy	5
2.3.1	Kres górny	5
2.3.2	Kres dolny	5
2.4	Funkcje	5
2.5	Liczby naturalne	5
2.6	Zasada indukcji matematycznej	6
2.7	Liczby całkowite	6
2.8	Liczby wymierne	6
2.9	Porządki	6
2.9.1	Porządek produktowy	6
2.9.2	Porządek leksykograficzny	6
2.10	Właściwe odcinki początkowe	6
2.11	Liczby rzeczywiste	6
2.12	Dobry porządek	6
2.13	Homomorfizmy	7
2.14	Aksojmat wyboru	7
2.15	Liczby kardynalne	7
2.15.1	Twierdzenie Cantora	7
2.16	Twierdzenie Cantora-Bernsteina	7
2.17	Twierdzenie Hessenberga	8
2.18	Hipoteza continuum	8

1 Logika

1.1 Prawa logiki

1.1.1 Prawa łączności

- $(p \wedge q) \wedge r \leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

- $(p \vee q) \vee r \leftrightarrow p \vee (q \vee r)$
- $((p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r) \leftrightarrow (p \leftrightarrow (q \leftrightarrow r))$

1.1.2 Prawa przemienności

- $p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$
- $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$
- $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (q \leftrightarrow p)$

1.1.3 Prawa impotentności

- $p \vee p \leftrightarrow p$
- $p \wedge p \leftrightarrow p$

1.1.4 Prawo rozdzielności

$$(p \wedge q) \vee r \leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$$

1.1.5 Prawo de Morgana

$$\neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$$

1.1.6 Prawo podwójnej negacji

$$\neg\neg p \leftrightarrow p$$

1.1.7 Prawo transpozycji

$$(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$$

1.1.8 Prawo eksportacji-importacji

$$(p \wedge q) \rightarrow r \leftrightarrow p \rightarrow (q \rightarrow r)$$

1.2 Wnioskowanie

$$\frac{x_1, x_2, \dots, x_n}{y}$$

x_n - założenia, y - teza

Wnioskowanie jest dedukcyjne jeżeli $x_1 \wedge x_2 \cdots \wedge x_n \rightarrow y$ jest tautologią.

Jeżeli wniosek wynika logicznie z przesłanek to wnioskowanie jest dedukcyjne.

1.2.1 Reguły wnioskowania

Poniższe reguły są zawsze poprawne.

$$\frac{p, p \rightarrow q}{q}$$

$$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow r}{p \rightarrow r}$$

$$\frac{p \rightarrow q, \neg q}{\neg p}$$

$$\frac{p \rightarrow q, q \rightarrow p}{p \leftrightarrow q}$$

1.3 Przekształcenia

$$p \rightarrow q \leftrightarrow \neg p \vee q$$

$$(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

$$X \downarrow Y = \neg(x \vee y)$$

$$X \uparrow Y = \neg(x \wedge y)$$

1.4 Postaci normalne

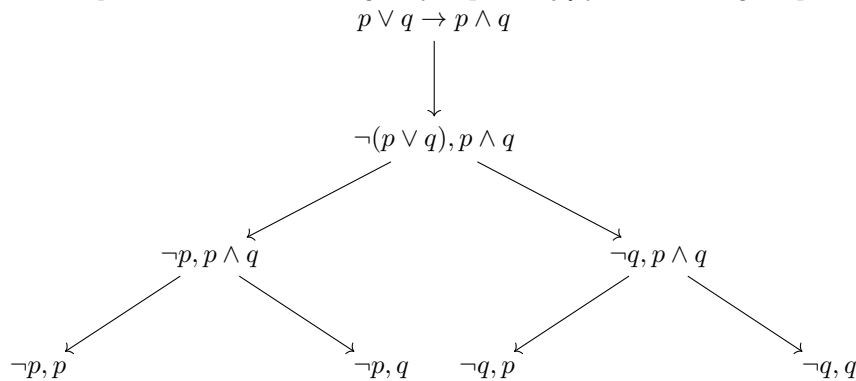
APN - alternatywna postać normalna. Zbiór klauzul nad zmiennymi połączonymi operatorem alternatywy. $(p \wedge q) \vee (\neg p \wedge q)$. Jeśli w APN jest para klauzul przeciwnych to jest to anty-tautologia.

KPN - koniunkcyjna postać normalna. Zbiór klauzul nad zmiennymi połączonymi operatorem koniunkcji. $(p \vee q) \wedge (\neg p \vee q)$. Jeśli w KPN jest para klauzul przeciwnych to jest to tautologia.

p	q	r	APN	KPN
1	1	1	$p \wedge q \wedge r$	$\neg p \vee \neg q \vee \neg r$
1	1	0	$p \wedge q \wedge \neg r$	$\neg p \vee \neg q \vee r$
1	0	1	$p \wedge \neg q \wedge r$	$\neg p \vee q \vee \neg r$

1.5 Sekwenty

Sekwent to para zbiorów formuł logicznych powstający z normalnego zapisu algebry logicznej.



Przy pomocy takiego drzewa można sprawdzić czy formuła jest tautologią.

1.6 Kwantyfikatory

$$\forall_{A(x)} B(x) \leftrightarrow \forall_x (A(x) \rightarrow B(x))$$

$$\exists_{A(x)} B(x) \leftrightarrow \exists_x (A(x) \wedge B(x))$$

2 Teoria Mnogości

2.1 Zbiory

- $X \subset Y \leftrightarrow \forall x(x \in X \rightarrow x \in Y)$
- $X \cup Y \leftrightarrow \{x : x \in X \vee x \in Y\}$
- $X \cap Y \leftrightarrow \{x : x \in X \wedge x \in Y\}$
- $X \setminus Y \leftrightarrow \{x : x \in X \wedge \neg x \in Y\}$

- $A \nabla \cdot B = \{x : (x \in A \wedge \neg x \in B) \vee (\neg x \in A \wedge x \in B)\}$
- $\bigcup_{i \in I} A_i = \{x : \exists i \in I (x \in A_i)\}$
- $\bigcap_{i \in I} A_i = \{x : \forall i \in I (x \in A_i)\}$

\mathbb{U} - uniwersum

$A' = \mathbb{U} \setminus A$

$A \times B = \{ \langle x, y \rangle : x \in A \wedge y \in B \}$

2.2 Relacje

$$R^{-1} = \{ \langle y, x \rangle : \langle x, y \rangle \in R \}$$

$$xRy \leftrightarrow \langle x, y \rangle \in R$$

2.2.1 Złożenie relacji

$$R \circ S = \{ \langle x, z \rangle : \exists y (xRy \wedge ySz) \}$$

Przykład:

$$R = \{ \langle 1, 2 \rangle, \langle 2, 3 \rangle \}$$

$$S = \{ \langle 2, 3 \rangle, \langle 3, 4 \rangle \}$$

$$R \circ S = \{ \langle 1, 3 \rangle, \langle 2, 4 \rangle \}$$

2.2.2 Rodzaje relacji

- Zwrotna $\forall x \in A xRx$
- Preciwzwrotna $\neg \exists x \in A xRx$
- Symetryczna $\forall x, y \in A (xRy \rightarrow yRx)$
- Przeciwsymetryczna $\forall x, y \in A (xRy \rightarrow \neg yRx)$
- Antysymetryczna $\forall x, y \in A ((xRy \wedge yRx) \rightarrow x = y)$
- Przechodnia $\forall x, y, z \in A ((xRy \wedge yRz) \rightarrow xRz)$
- Spójna $\forall x, y \in A (xRy \vee yRx)$
- Słabospójna $\forall x, y \in A (xRy \vee x = y \vee yRx)$

2.2.3 Relacja równoważności

Relacja równoważności to relacja która jest zwrotna, symetryczna i przechodnia. Taka relacja może mieć klasy abstrakcji $[x]_R = \{y : xRy\}$

2.2.4 Relacje porządkujące

Relację $R \subset A_2$ nazywamy relacją porządkującą na zbiorze A_1 jeżeli:

- R jest zwrotna
- R jest antysymetryczna
- R jest przechodnia

Dodatkowo ta relacja może być liniowo porządkująca jeżeli:

- R jest spójna
- R jest porządkująca

Zbiór $X \subset A_1$ jest łańcuchem w zbiorze uporządkowanym (A_1, R) jeżeli dla dowolnych $x, y \in X$ zachodzi $xRy \vee yRx$.

2.2.5 Zbiory uporządkowane

(X, A) to zbiór uporządkowany; X to zbiór, A to relacja porządkująca.

- Element najmniejszy a : $\forall x \in X (a \leq x)$
- Element największy b : $\forall x \in X (x \leq b)$
- Element minimalny a : $\forall x \in X (x \leq a \rightarrow x = a)$
- Element maksymalny b : $\forall x \in X (b \leq x \rightarrow x = b)$

Element największy/najmniejszy jest jedynym elementem maksymalnym/minimalnym, oraz jest jednocześnie kresem górnym/dolnym.

2.3 Kresy

Kres nie musi należeć do zbioru.

2.3.1 Kres górny

$$\alpha = \sup A \leftrightarrow \forall x \in A (x \leq \alpha)$$

2.3.2 Kres dolny

$$\beta = \inf A \leftrightarrow \forall x \in A (\beta \leq x)$$

2.4 Funkcje

Relacja binarna R spełniająca prawostronną jednoznaczność to funkcja.

$$\forall x, y, z (xRy \wedge xRz \rightarrow y = z); \text{ czyli dla każdego } x \text{ jest jedno } y$$

Przeciwdziedzina funkcji $f : D^*(f) = \{f(x) : x \in D(f)\}$

$$f : X \rightarrow Y \text{ jeżeli } D(f) = X \wedge D^*(f) \subset Y$$

Funkcja odwzorowuje zbiór X na zbiór Y jeżeli $D^*(f) = Y$

$$\forall x_1, x_2 \in X (f(x_1) = f(x_2) \rightarrow x_1 = x_2) \rightarrow f \text{ jest iniekcją}$$

Iniekcja to funkcja różnowartościowa, suriekcja to funkcja odwzorowująca na zbiór, a bijekcja to iniekcja i suriekcja. Obraz zbioru to $f[A] = \{f(x) : x \in A\} = \{y : \exists x (x \in A \wedge y = f(x))\}$

$$f^{-1}[B] = \{x : f(x) \in B\}$$

2.5 Liczby naturalne

$$S(x) = x \cup \{x\} - \text{następnik zbioru } X$$

$$n \in \mathbb{N}, n = \{0, 1, \dots, n-1\}$$

$$0 = \emptyset, 1 = \{0\} = S(\emptyset), 2 = \{0, 1\}$$

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

Zbiór X jest indukcyjny jeżeli:

- $0 \in X$
- $x \in X \rightarrow S(x) \in X$

Liczba naturalna to zbiór należący do wszystkich indukcyjnych zbiorów.

2.6 Zasada indukcji matematycznej

$$0 \in X \wedge \forall_{n \in \mathbb{N}} (S(n) \in X) \rightarrow X = \mathbb{N}$$

$$f(n) \text{ - formuła } \wedge \forall_{f(n)} (F(S(n))) \rightarrow \forall_{n \in \mathbb{N}} (f(n))$$

2.7 Liczby całkowite

$$\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n : n \in \mathbb{N}\}$$

2.8 Liczby wymierne

$$\mathbb{Q} = \{x : x = \frac{m}{n}, m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}\}$$

2.9 Porządki

2.9.1 Porządek produktowy

$$a, b \in A \times B \wedge \forall_{x_A, y_A \in A, x_B, y_B \in B} (x_A \leq_A x_B \wedge y_A \leq_B y_B) \rightarrow a \leq b$$

2.9.2 Porządek leksykograficzny

$$a, b \in A \times B \wedge \forall_{x_A, y_A \in A, x_B, y_B \in B} (x_A = x_B \wedge y_A \leq_B y_B) \rightarrow a \leq b$$

2.10 Właściwe odcinki początkowe

(A, \leq) - zbiór liniowo uporządkowany. Jeżeli $X \subset A$ oraz $\forall_{x, y \in A} (x \in X \wedge y < x) \rightarrow y \in X$ to X jest właściwym odcinkiem początkowym.

Przykład:

- $A = (\{1, 2, 3, 4, 5\}, \leq)$ - zbiór liniowo uporządkowany
- $X = \{1, 2, 3\}$ - właściwy odcinek początkowy
- $Y = \{2, 3, 4\}$ - nie jest właściwym odcinkiem początkowym

Przykład:

- $A = (\mathbb{Q}, \leq)$ - zbiór liczb wymiernych
- $X = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$ - właściwy odcinek początkowy

X jest właściwym odcinkiem początkowym. Zaczyna się od $-\infty$ i kończy na 0. Jedyne elementy mniejsze od elementów z X to elementy z X .

2.11 Liczby rzeczywiste

Liczby rzeczywiste definiujemy jako niepuste właściwe odcinki początkowe w (\mathbb{Q}, \leq) , nie mające elementu największego.

Zatem liczby wymierne są reprezentowane przez niepuste właściwe odcinki początkowe w (\mathbb{Q}, \leq) , które nie mają elementu największego, ale mają kres górny.

Liczby niewymierne to liczby wymierne, ale nie mają kresu górnego.

2.12 Dobry porządek

Porządek \leq , który ma element najmniejszy w każdym podzbiórze niepustym, jest dobrym porządkiem. Zbiór dobrze uporządkowany można przedstawić jako serię mniejszości elementów różnych zbiorów $a_0 < a_1 < a_2 \cdots < b_0 < b_1 \dots$

Przykładem zbioru liniowo uporządkowanego ale nie dobrze uporządkowanego jest \mathbb{R} lub \mathbb{Z} . Każdy podzbiór w \mathbb{R} jest nieskończony, zatem nie da się skonstruować serii mniejszości.

Funkcja działająca ze zbioru dobrze uporządkowanego (A, \leq) do zbioru dobrze uporządkowanego (B, \leq) zachowuje porządek jeśli $\forall_{x \leq_A y; x, y \in A} (f(x) \leq_B f(y))$, oraz zachowuje ostry porządek jeśli $\forall_{x <_A y; x, y \in A} (f(x) <_B f(y))$.

2.13 Homomorfizmy

Jeżeli funkcja $f : A \rightarrow B$ dla zbiorów liniowo uporządkowanych (A, \leq_A) i (B, \leq_B) jest iniekcją i zachowuje porządek to jest to homomorfizm porządkowy. Jeżeli funkcja jest homomorfizmem porządkowym oraz bijekcją dla zbiorów uporządkowanych to jest izomorfizmem. Zbiory dla których istnieje izomorfizm są izomorficzne wobec siebie ($A \simeq B$). Jeżeli A jest zbiorem dobrze uporządkowanym i funkcja f zachowuje ostry porządek to $x \leq f(x)$ dla każdego $x \in A$. Zbiór dobrze uporządkowany nie jest izomorficzny z żadnym swoim właściwym odcinkiem początkowym. Jeżeli A i B są zbiorami dobrze uporządkowanymi i $A \simeq B$ to A i B są izomorficzne z właściwymi odcinkami początkowymi drugiego zbioru.

2.14 Aksojmat wyboru

Dla dowolnej rodziny zbiorów niepustych i parami rozłącznych istnieje zbiór zawarty w sumie tej rodziny i mający z każdym zbiorem tej rodziny dokładnie jeden element wspólny.

Ten aksojmat jest równoważny:

- Twierdzeniu, że dla dowolnej rodziny zbiorów niepustych istnieje funkcja wyboru dla rodziny
- Twierdzeniu, że dla każdego zbioru istnieje dobry porządek na tym zbiorze
- Jeżeli zbiór uporządkowany spełnia warunek łańcucha, to dla każdego łańcucha istnieje ograniczenie górne

2.15 Liczby kardynalne

Zbiór X jest równoliczny ze zbiorem Y jeżeli istnieje bijekcja $f : X \rightarrow Y$ ($X \sim Y$).

$$\overline{X} = |X| = \text{liczba elementów zbioru } X$$

Zbiór Y jest skończony, jeżeli jest równoliczny z jakąś liczbą naturalną: $\exists x \in \mathbb{N} (Y \sim x)$. Zbiór skończony nie jest równoliczny z żadnym ze swoich podzbiorów.

$$\aleph_0 = |\mathbb{N}| = \aleph_0 + \aleph_0 = \text{liczba liczb naturalnych}$$

Moc zbioru to \aleph_0 wtedy i tylko wtedy jeżeli X jest zbiorem wszystkich wyrazów pewnego ciągu nieskończonego bez powtórzeń. Zbiór jest przeliczalny jeżeli jest skończony lub mocy \aleph_0 . Zbiór jest niepusty i przeliczalny wtedy i tylko wtedy gdy jest zbiorem wszystkich wyrazów pewnego ciągu nieskończonego.

Zbiór \mathbb{R} jest nieprzeliczalny.

$$c = |\mathbb{R}| = c + c > \aleph_0$$

$$|X| \leq |Y| \leftrightarrow \exists Z (Z \subset X \wedge Z \sim Y)$$

2.15.1 Twierdzenie Cantora

$P(X)$ - zbiór potęgowy X

$$|X| < |P(X)|$$

2.16 Twierdzenie Cantora-Bernsteina

$$|X| \leq |Y| \wedge |X| \geq |Y| \rightarrow |X| = |Y|$$

$$|X| + |Y| = |X \cup Y|$$

$$|X| \cdot |Y| = |X \times Y|$$

2.17 Twierdzenie Hessenberga

$$X \times X \sim X$$

dla każdego nieskończonego zbioru X

$$\aleph_{n+1} > \aleph_n, n \in \mathbb{N}$$

2.18 Hipoteza continuum

$$c = \aleph_1$$

$$2^{\aleph_0} = \aleph_1$$

Udowodniono, że ta hipoteza jest niezależna od aksjomatów teorii mnogości.