

## 1 Graf

Graf nieskierowany, to uporządkowana para wierzchołków  $V$  i krawędzi  $E$ :

$$G = (V, E)$$

Jeśli  $(x, y) \in E$ , to mówimy, że  $x$  i  $y$  są przyległe i  $x$  jest sąsiadem wierzchołka  $y$ . Stopniem wierzchołka jest liczba jego sąsiadów.

Ścieżka  $P_n$  to graf  $n$  wierzchołków, gdzie:

$$V = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \quad E = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), \dots, (w_{n-1}, w_n)\}$$

Cykl  $C_n$  to ścieżka z dodatkową krawędzią łączącą końce:

$$V = \{w_1, w_2, \dots, w_n\} \quad E = \{(w_1, w_2), (w_2, w_3), \dots, (w_{n-1}, w_n), (w_n, w_1)\}$$

Graf pełny  $K_n$  to graf w którym każde dwa różne wierzchołki są przyległe.

Podgraf  $H \subseteq G$  to podzbiór wierzchołków  $G$  i krawędzi  $G$ . Pograf rozpina  $G$ , jeśli każdy wierzchołek  $G$  jest w  $H$ .

Graf jest spójny, jeśli każde dwa jego wierzchołki są połączone ścieżką. Składowa grafu to maksymalny podgraf spójny.

Drzewo to graf spójny bez cykli.

## 2 Gra

W ramach przedmiotu będziemy rozważać gry skończone, z pełną informacją o stanie gry. Zakładamy, że w ramach gier będą występować tylko dwaj gracze, i co za tym idzie, gra się może kończyć z wynikiem 1 (gracz 1 wygrywa), 0 (gracz 2 wygrywa), lub 1/2 (remis).

### 2.1 Strategia

Strategią, nazywamy funkcję działającą na podstawie stanu gry i zwracającą ruch gracza, lub kolejny stan. Czysto teoretycznie, strategia musi być zdefiniowana z wszystkich stanów na wszystkie możliwe stany pochodne, lecz w rzeczywistości, jest wiele stanów, których nie ma sensu rozważać.

#### 2.1.1 W każdej grze ktoś ma strategię nieprzegrywającą

1. Gracz I ma strategię nieprzegrywającą, lub jej nie ma
2. Jeśli ma, to dowód zakończony
3. Jeśli nie ma, to wartość gry to 0, więc drugi ma wygrywającą
4. Każda strategia wygrywająca jest nieprzegrywająca, więc 2 ma nieprzegrywającą
5. Albo I albo II ma nieprzegrywającą, Q.E.D.

#### 2.1.2 Jeśli nie ma remisu w grze, to ktoś ma strategię wygrywającą

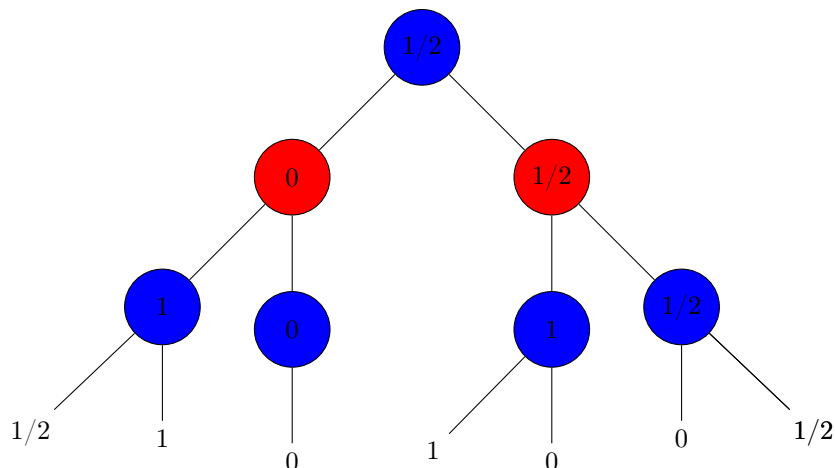
1. W każdej grze ktoś ma strategię nieprzegrywającą
2. Zatem, każda gra ma wartość 0, 1/2, lub 1
3. Jeśli gra nie pozwala na remis, to nie może mieć gra wartości 1/2
4. Więc gra może mieć tylko wartości 0 i 1
5. Więc ktoś musi mieć wygrywającą strategię

## 2.2 Drzewo gry

Różne stany gry można rozważać w postaci drzewa gry, gdzie każdy węzeł reprezentuje możliwy stan gry, krawędzie ruchy, a poziomy drzewa reprezentują rundy gry.

### 2.2.1 Analiza wstecz

Analizując wstecz zachowania graczy w ramach gry, możemy przyporządkować każdemu stanowi "wartość", która odpowiada za wynik gry w tym momencie, zakładając optymalne ruchy obu graczy. Działa to zgodnie z prostą zasadą: w stanie, w którym gracz I ma ruch, wybiera on ruchy do stanów o wartości 1, lub  $1/2$  jeśli są takie.



Rysunek 1: Przykładowe wartościowanie stanów gry

W kontekście fig. 1, na podstawie analizy wstecz możemy bardzo łatwo określić, że wartością gry jest  $1/2$ . Na podstawie tego wyniku, że każdy z graczy ma strategię nieprzegrywającą. Równocześnie nikt nie ma strategii wygrywającej. W kontekście takiego drzewa, strategią jest decyzja na każdym liściu, do którego dziecka przejść.

### 2.2.2 Eksplozja kombinatoryczna

Eksploracja drzewa gry stanowi klasyczną metodę analizy gier. Jednak, ma spore problemy, głównie związane z ilością rozważanych stanów. Stąd, często lepszymi metodami analizy, są te oparte o dowody nie-wprost.

## 3 Hex

Jeśli na każdym polu planszy Hex  $m \times n$  położymy pionka o dowolnym kolorze, to jeden z kolorów będzie w pozycji wygrywającej. Stąd też, nie ma remisów w tej grze.

W Hex  $n \times n$  gracz I ma strategię wygrywającą, na podstawie kradzieży strategii. W Hex  $m \times n$  gracz "krotki", czyli ten z krótszą krawędzią, ma strategię wygrywającą, nawet, jeśli jest drugim graczem. To, z kolei, wynika z metody ruchów odpowiadających.

Rex to odwrócony wariant Hex, gdzie stanem przegrywającym jest stworzenie połączenia. W Rex  $n \times n$  gracz pierwszy ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy  $n$  jest parzyste.

## 4 Chomp

Na tabliczce  $n \times m$  gracze na przemian wybierają kostkę. Tym ruchem ograniczają tabliczkę do kostek na lewo lub powyżej wcześniej wybranej; jakby odgryzali wszystko na prawo i w dół. Celem gry jest doprowadzenie przeciwnika do zjedzenia kostki w lewym górnym rogu.

## 5 Kradzież strategii

Jest to technika analizy gry, która polega na analizie potencjalnych strategii przeciwnika. Na przykład, pozwala nam udowodnić, że gracz ma strategię wygrywającą, nawet jeśli nie jest w stanie ją znaleźć samodzielnie.

### Przykład 5.1

W Hex, nie ma remisów. W związku z tym, jak zakładamy, że gracz II ma strategię wygrywającą, to gracz I musi nie mieć wygrywającej strategii. Można, jednak znaleźć sprzeczność w założeniach. Wyobraźmy sobie, że gracz I ma strategię gracza II. W takiej sytuacji, gracz I może zrobić jakiś losowy ruch, i potem po prostu podążać tą strategią wygrywającą gracza II. Napotkanie naszego wcześniejszego ruchu nie jest problemem - wystarczy, zrobić inny losowy ruch. To oznacza, że gracz I ma strategię wygrywającą - opartą na strategii gracza II. Sprzeczność, czyli gracz II nie ma strategii wygrywającej, czyli gracz I ma strategię wygrywającą.

Ten dowód opiera się na kluczowych faktach:

- W Hex nie ma remisów
- Pola w Hex mogą być tylko w 3 stanach
- Ruch dodatkowy w Hex nie może być szkodliwy

Najłatwiej ten dowód atakować w innych grach poprzez nasz losowy ruch. Gry takie jak Rex, charakteryzują się tym, że ruch potrafi być zły dla gracza.

Kradzież strategii działa też w Chomp. Tam, ponownie zakładamy, że gracz II ma strategię wygrywającą. Gracz I zjada prawy dolny róg. To jest nieszkodliwe i potem podąża za strategią gracza II. Zatem mamy sprzeczność - gracz I ma strategię wygrywającą, a gracz II nie ma strategii wygrywającej.

## 6 Metoda ruchów odpowiadających

Dla niektórych gier, odpowiednią strategią jest ruch odpowiadający. Ogólnie, można powiedzieć, że ruchem odpowiadającym jest taki ruch, który jest jakimś odpowiednikiem ruchu gracza przeciwnego. Wtedy strategia staje się funkcją ruchu przeciwnika.

Na przykład, w kółko i krzyżyk, dla dowolnego rozmiaru planszy i kombinacji, da się stworzyć parowania pól, które należy wypełnić w momencie kiedy przeciwnik wypełni sparowane pole. Dla bardziej skomplikowanych wariantów kółka i krzyżyk da się w ten sposób skonstruować strategię nieprzegrywającą.

Innym dobrym przykładem jest Hex  $m \times n$ . Tam, wystarczy papugować ruchy przeciwnika, jako gracz "krótki", wzdłuż osi symetrii planszy. To nie pozwoli mu zbudować połączenia, a jednocześnie nasza ścieżka jest krótsza i zawsze ktoś musi wygrać.

## 7 Gra Shannona

Na grafie spójnym  $G$ , z dwoma wyróżnionymi wierzchołkami  $a, b \in V$ , dwaj gracze po kolei malują na zmianę po jednej krawędzi. Wygrywa Konstruktor, jeśli powstanie ścieżka o końcach  $a, b$ ; Destruktor przegrywa w takim przypadku.

W grze, konstruktor ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy jakiś podgraf  $G$  (może też  $G$ ) posiada przynajmniej dwa krawędziowo rozłączne drzewa rozpinające.

## 8 Gra w spójność

Jest to gra podobna do gry shannona, tylko, że celem konstruktora jest doprowadzenie do drzewa rozpinającego, a konstruktora zapobiegnięcie.

W grze, konstruktor ma strategię wygrywającą wtedy i tylko wtedy, gdy  $G$  posiada przynajmniej dwa krawędziowo rozłączne drzewa rozpinające.

## 9 Bridge-it

Bridge-it  $4 \times 4$  jest analogiczny do Hex  $7 \times 7$  w specjalnej konfiguracji startowej. Z wniosków apropos Hex możemy wywnioskować, że w Bridge-it nie ma remisu, oraz strategię wygrywającą ma gracz I.

## 10 Gra w $K_n$

Na planszy postaci grafu pełnego  $K_n$  gracze na przemian malują krawędzie w swoim kolorze. Wygrywa ten, który pierwszy zbuduje  $K_k$  w swoim kolorze.

Jeśli  $k = 3$ , to dla  $n \leq 4$  wartość gry to  $1/2$ , dla  $n > 4$ , wartość gry to 1. Stąd, pierwszy z graczy ma strategię nieprzegrywającą. Można, to określić z kradzieży, dla każdego  $k > 2$ .

Prawdziwie ciekawym pytaniem, jest to, dla jakiego  $n$  remis jest możliwy, a dla jakiego nie?

## 11 Ramsey

Dowolnie malujemy krawędzie  $K_n$  dwoma kolorami. Czy zawsze powstanie monochromatyczny trójkąt? Dla  $n \leq 5$  nie, dla  $n > 5$  tak. Czyli najmniejsze  $n$ , które prowadzi do gwarantowanego monochromatycznego trójkąta to 6.

### Przykład 11.1

Liczba Ramseya  $r(q_1, \dots, q_k)$ , to najmniejsze  $j$ , dla którego przy dowolnym  $k$ -kolorowaniu krawędziowym, istnieje klika rozmiaru  $q_i$ , której wszystkie krawędzie są koloru  $i$ .

$$r(3, 3) = 6$$

Notacyjnie,  $r(3, 3)$  zadaje pytanie, dla jakiego  $j$  istnieje zawsze, niezależnie od kolorowania, klika czerwona rozmiaru 3, lub niebieska rozmiaru 3.

$$r(3, 3, 3) = 17 \neq r(3, 3)$$

Dla trzy kolorowania mamy więcej kolorów, więcej potencjalnych kolorowań, więc oczywiście liczba musi być większa aby zagwarantować trójkąt.

$$r(3, 4) = 9 \neq r(3, 3)$$

Podobnie tutaj, gdzie pytamy jaka liczba gwarantuje, że dla dowolnego kolorowania, jakie  $j$  gwarantuje, że jest klika czerwona rozmiaru 3 lub niebieska rozmiaru 4. Jest to zawężenie, bo jest mniej potencjalnych klik rozmiaru 4 na  $K_n$ .

Dla dowolnego  $a$  i  $b$  zawsze istnieje  $r(a, b)$ . Piszemy  $K_n \rightarrow (K_a, K_b)$ , jeśli dla każdego kolorowania krawędzi  $K_n$  dwoma kolorami, powstanie czerwona  $K_a$ , lub niebieska  $K_b$ .

Ponieważ istnieje bijekcja, między kolorowaniami na  $K_n$ , a stanami gry w  $K_n$ , to można wnioskować, że jeśli  $r(k, k) = n$ , to strategię wygrywającą ma gracz pierwszy i remis jest niemożliwy.

$$r(a, b) \leq r(a - 1, b) + r(a, b - 1)$$

$$r(k_1, \dots, k_r) \leq \sum_{i=1}^r r(k_1, \dots, k_i - 1, \dots, k_r) - (r - 2)$$

## 12 Geometria Dyskretna

Większość gier opiera się o jakąś abstrakcyjną definicję. Na przykład, hex, określony dla planszy rozmiaru  $n \in \mathbb{N}$ . Tutaj będziemy rozważać gry określone dla większej ilości dyskretnych parametrów, z czego się pojawia geometria dyskretna.

## 12.1 Kółko i krzyżyk

Prostą grę w kółko i krzyżyk można zdefiniować abstrakcyjnie dla  $n$  wymiarów. Klasyczna wersja jest dwuwymiarowa;  $[3]^2$ , z  $3 \times 3$  pól. Można sobie zatem wyobrazić wersję jedno-wymiarową  $[3]^1$  z 3 polami, albo  $[3]^3$  z  $3 \times 3 \times 3$  polami.

Zbiorem pól dla gry kółko i krzyżyk  $[k]^n$  jest:

$$\{(w_1, w_2, \dots, w_n) : \forall_i w_i \in \{1, \dots, k\}\}$$

czyli, po prostu, dyskretne punkty na planszy  $\overbrace{k \times k \cdots \times k}^n$ .

Dla takiej gry linia, to zbiór  $k$  różnych punktów, takich, że kolejne  $w_i$  dla rosnących  $i$  tworzą ciągi o określonej monotoniczności; stałej, rosnącej lub malejącej. Ponieważ, współrzędne są symetryczne i abstrakcją, to można zamieniać kolejnościami. Zatem, dla  $[3]^4$ :

$$3 \left\{ \underbrace{\begin{pmatrix} (2, 1, 3, 1) \\ (2, 2, 2, 2) \\ (2, 3, 1, 3) \end{pmatrix}}_4 = \begin{pmatrix} (2, 3, 1, 3) \\ (2, 2, 2, 2) \\ (2, 1, 3, 1) \end{pmatrix} \dots \left. \begin{matrix} \overbrace{(w_1, \dots, w_n)}^n \\ \vdots \\ (w_1, \dots, w_n) \end{matrix} \right\} k$$

Wartością  $[3]^2$  jest  $1/2$ , podobnie  $[4]^2$ .  $[3]^3$ ,  $[4]^3$  jak i  $[3]^4$  mają wartość 1.

Dla ogólnego problemu wartości  $[k]^n$ , możemy z kradzieży wywnioskować, że gracz drugi nigdy nie ma strategii wygrywającej. Stąd też wartość to albo  $1/2$  lub 1. Zatem, wartość gry  $[k]^n$  sprowadza się do problemu tego, czy w grze jest remis.

### 12.1.1 Twierdzenie Halesa-Jewetta

Dla dowolnego  $k \in \mathbb{N}$ , istnieje  $n \in \mathbb{N}$ , że przy dowolnym pokolorowaniu dwoma kolorami planszy  $[k]^n$  powstanie monochromatyczna linia.

Lub inaczej; jest  $k$ , dla którego przy odpowiednim  $n$ , nie da się zremisować. Najmniejsze takie  $n$  oznaczamy  $hj(k)$ . **Uwaga na notację!**,  $HJ(k) \neq hj(k)$ .

$$hj(3) = 3$$

Jeśli  $n \geq hj(k)$ , to nie ma remisów w  $[k]^n$ , a co za tym idzie wartość gry musi być 1.

## 12.2 Set

## 13 Gry KK vs KD

W zależności od definicji gry, można zdefiniować jej alternatywną wersję ze zmodyfikowanym celem gry graczy. Np.: Hex to gra Konstruktor-Konstruktor(KK), lecz, można zdefiniować jej wersję alternatywną Konstruktor-Destruktor(KD), w której celem gracza 2 nie jest zbudowanie połączenia, lecz zapobiegnięcie zbudowania połączenia przez gracza 1.

W krach KD zwyczajowo zaczyna konstruktor, chyba, że to gra Shannona, albowiem zwyczaj.

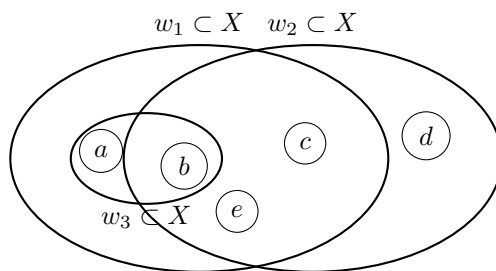
W grach KD, jeśli destruktory ma strategię nieprzegrywającą w wariacie KK, to ma też wygrywającą w KD, albowiem remis, brak legalnego ruchu, jest jego stanem wygrywającym.

W grach KD, jeśli destruktory ma strategię nieprzegrywającą strategię ruchów odp, to jest to strategia wygrywająca.

Hex absolutnie się nie zmienia na skutek  $KK \rightarrow KD$ . Dla KK:  $[3]^2 = 1$ ,  $[5]^2 = 0$ ,  $[n]^d = 1 : d \geq hj(n)$ . Co więcej, jeśli  $[n]^d = 1$ , to  $[n]^{d+1} = 1$ .

### 13.1 Definicja

W ogóle, gra KD jest zdefiniowana jako  $(X, \mathcal{W}), \forall w \in \mathcal{W} w \subset X$ , czyli pewien zbiór elementów, wraz z zbiorem wygrywających elementów. Wygrywa Konstruktor, gdy którykolwiek  $w \in \mathcal{W}$  jest koloru konstruktora. W przypadku Gry Shannona,  $X$  to krawędzie, a  $\mathcal{W}$  to ścieżki łączącej  $A$  i  $B$ .

Rysunek 2: Wizualizacja  $(X, \mathcal{W})$ 

## 13.2 Wizualizacja

W takiej strukturze jak fig. 2, zamiast rysować krawędzie, kolorujemy elementy  $X$ , czyli punkty wizualizacji. Jeśli jakiś podzbiór, "ziemniaczek" jak to zostało cudownie nazwane na wykładzie, będzie jednego koloru, to wygrywa Konstruktor.

## 13.3 Rachunek prawdopodobieństwa

Wyobraźmy sobie, że losowo każdy element z  $X$  kolorujemy na 2 kolory. Ile będzie zbiorów czerwonych w  $\mathcal{W}$ ? Mierzmy to jako zmienną losową  $Z$ .

### 13.3.1 Twierdzenie Erdosa-Selfridge'a

Jeśli  $\mathbb{E}Z < 0.5$ , to Destruktor ma strategię wygrywającą.

$$\mathbb{E}Z = \sum_{w \in \mathcal{W}} \frac{1}{2^{|w|}}$$

**Kryterium nie działa w drugą stronę**

## 14 Gry NIM

Gra NIM to każda gra, którą da się przedstawić w postaci następującego grafu skierowanego  $G$ , zwanego grafem NIM:

- $V(G)$  jest zbiorem pozycji w grze
- $(x, y) \in E(G)$  wtedy i tylko wtedy, gdy z pozycji  $x$  gracz może przejść w jednym ruchu do pozycji  $y$
- $G$  jest acykliczny (w skierowany sposób, więc cykle mogą być, ale nie może być cykli skierowanych)
- Istnieje jeden wierzchołek o stopniu wejścia 0, zwany pozycją startową

Z acykliczności wynika istnienie wierzchołka o stopniu wyjścia 0, będący pozycją końcową.

### Przykład 14.1

Szachy nie są grą NIM, bo są cykliczne (skoczek). Chomp i usuwanie monet są grami NIM.

### 14.1 Ocena pozycji

W grach NIM oceniamy pozycje w następujący sposób:

- Jeśli gracz w danej pozycji przegrywa, to mówimy, że jest to pozycja P
- Jeśli pozycja prowadzi do pozycji P, to jest R - rozstrzygająca
- Jeśli wszyscy sąsiedzi wierzchołka są R, to jest to wierzchołek P

Każdemu wierzchołkowi grafu NIM można przypisać jednoznacznie, że jest P lub R.

## 14.2 Suma Gier

Dla zbioru wierzchołkowo rozłącznych grafów  $G_1, G_2, \dots, G_n$  gier NIM, możemy zdefiniować nową grę tak, że ruch polega na wybraniu jednego  $G_k$  i wykonaniu w nim ruchu. Przegrywa, kto nie ma ruchu, czyli w każdym  $G_j$  została osiągnięta pozycja końcowa.

Mówimy, że taka gra jest sumą gier NIM:

$$G_1 + G_2 + \dots + G_n$$

Aby określić wartość sumy gier, robimy XOR kolejnych wartości  $G_k$ .

## 14.3 Nimber

Jest to inna forma oceny pozycji niż R/P.

- Pozycja przegrywająca ma 0

$$ni(x) = 0 \leftrightarrow N(x) = \emptyset \quad N(x) = \{v : (x, v) \in E(G)\}$$

- Każda inna pozycja  $x$  ma nimbera równego najmniejszej  $\geq 0$  liczbie całkowitej, której nie ma w zbiorze nimberów sąsiadów:

$$ni(x) = \min \{n \geq 0 : n \notin \{ni(v) : v \in N(x)\}\}$$

Każdemu wierzchołkowi można przypisać  $ni(v)$  w sposób jednoznaczny. Nimber pozycji startowej nazywamy nimerem tej gry.

$$ni(G) = ni(x) : \{(v, x) : v \in G\} = \emptyset$$

W każdym grafie NIM, wierzchołek jest P-pozycją wtedy i tylko wtedy gdy ma  $ni(x) = 0$ .

$$v = P \leftrightarrow ni(v) = 0$$

### 14.3.1 Nimowanie

Operacją nimowania, nazywamy operację  $\oplus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Aby obliczyć wartość  $\oplus(a, b)$ , należy:

- Zapisz  $a$  i  $b$  w systemie dwójkowym
- Dodaj po współrzędnych mod 2
- Wynik zapisz w dziesiętnym

$\mathbb{N}$  z działaniem  $\oplus$  jest grupą abelową.

### 14.3.2 Nimowanie gier

Dla gier NIM  $G_1, \dots, G_k$ , nimber ich sumy jest sumą nimberów składowych:

$$ni\left(\sum_{i=1}^k G_i\right) = ni(G_1) \oplus ni(G_2) \oplus \dots \oplus ni(G_k)$$

To oznacza, że możemy bardzo łatwo rozważać wartości gier złożonych, oraz, co ciekawe, wartości konkretnych ruchów. Wystarczy z danej gry  $G_i$ , usunąć wszystkie poddrzewa, w których dany ruch nie został wykonany, w ten sam sposób tworząc  $G'_i$ .

*She nim on my ber till I Grundy*

## 15 Gry o sumie zerowej

Celem nie jest wygrana, lecz maksymalizowanie jakiejś liczby na końcu rozgrywki. Każda pozycja ma przypisaną wypłatę  $\mathbb{R}$ . Domyślnie, gracz I chce maksymalizować tę wypłatę, a gracz II minimalizować. Dotychczasowe gry to szczególny przypadek gier o sumie zerowej, gdzie wypłata  $\{0, 1, \frac{1}{2}\} \subset \mathbb{R}$ .

Jeśli gracz  $i$  stosuje strategię  $s_i$  dla  $i = 1, 2$ , to wypłatę na końcu rozgrywki oznaczamy  $w(s_1, s_2)$ .

### Przykład 15.1

Gra Konstruktor-Malarz, to gra w monochromatyczną  $K_3$  na  $K_n$ . Konstruktor wybiera krawędź, malarz maluje ją na jeden z dwóch kolorów.

Wypłata, to liczba rund, Konstruktor ją minimalizuje, malarz maksymalizuje. Konstruktor ma strategię wymuszającą monochromatyczną  $K_3$  w najwyżej 8 rundach. Malarz ma strategię, która pozwala mu przetrwać co najmniej 7 rund.

Wartość gry o sumie zerowej  $G$ , to taka liczba  $x = \text{val}(G)$ , że gracz maksymalizujący ma strategię gwarantującą wypłatę co najmniej  $x$ , a równocześnie, przeciwnik ma strategię gwarantującą wypłatę nie większą  $x$ .

Strategia optymalna gracza maksymalizującego, to taka co gwarantuje wypłatę co najmniej  $\text{val}(G)$ , bez względu na strategię przeciwnika. Strategia optymalna gracza minimalizującego, to taka co gwarantuje wypłatę nie większą niż  $\text{val}(G)$ .

### 15.1 Minimax

Gracz pierwszy maksymalizuje. Istnieje dokładnie jedna liczba  $x$ , dla której:

- Istnieje  $s_1$ , że dla każdej strategii  $s$ , przeciwnika, zachodzi:  $w(s_1, s) \geq x$
- Istnieje  $s_2$ , że  $w(s, s_2) \leq x$

Niech  $G$  będzie grą o sumie zerowej, w której graczem maksymalizującym jest gracz 1. Dla  $a \in \mathbb{R}$ :

- Jeśli dla  $s_1$ , zachodzi  $w(s_1, s) \geq a \rightarrow \text{val}(G) \geq a$
- Jeśli dla  $s_2$  zachodzi  $w(s, s_2) \leq a \rightarrow \text{val}(G) \leq a$

Podobnie jak w grach o konkretnym wyniku  $\{0, \frac{1}{2}, 1\}$ ; możemy użyć analizy wstecz aby określić wartość gry  $G$ . Tutaj, o wiele ciekawszym zagadnieniem jest estymacja wartości gry przy brakujących danych.

### 15.2 Metoda alfa-beta

1. Wierzchołki mają  $\text{val}(x) = [-\infty, \infty]$
2. Liście oznaczone, dostają  $\text{val}(x) = [w(x), w(x)]$
3. Cofamy się wstecz, rozważając kolejne oszacowania
4. Jeśli na wierzchołku gracza maksymalizującego  $x$ , sąsiadującego z  $[a, b]$ ,  $\max \text{val}(x) < a$  to obcinamy  $x$
5. Jeśli na wierzchołku gracza minimalizującego  $x$ , sąsiadującego z  $[a, b]$ ,  $\min \text{val}(x) > b$  to obcinamy  $x$