

1 Ciąg Funkcyjny

Ciąg funkcyjny, to ciąg funkcji $f_n(x)$ określonych na pewnym zbiorze A . Przykład:

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

1.1 Zbieżność

Ciąg funkcyjny może na podzbiore $E \subseteq D$ może być:

- zbieżny punktowo, czyli zbieżny dla każdego $x \in E$

$$\forall x \in E \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$$

$$\forall x \in E f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$$

$$\forall x \in E \forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

Lub; dla każdego $x \in E$, dla każdego marginesu, od pewnego punktu, odległość między f_n i f w punkcie jest mniejsza niż ϵ . Ponieważ w definicji ϵ zależy od x , to f może nie być ciągła.

- zbieżny punktowo bezwzględnie, to znaczy zbieżny punktowo dla $|f_n(x)|$
- zbieżny jednostajnie, to znaczy $a_n = \sup_{x \in E} f_n(x)$ jest zbieżny

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in E} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \forall n \geq N \forall x \in E |f(x) - f_n(x)| < \epsilon$$

Geometrycznie: w pasie o brzegach $y = f(x) \pm \epsilon$ leżą wszystkie krzywe $y = f_n(x)$. Zbieżność jednostajna implikuje punktową, oraz wymaga ciągłości f . Granica ciągu jednostajnie zbieżnego jest ciągła.

- zbieżny jednostajnie bezwzględnie, to znaczy $a_n = \sup_{x \in E} |f_n(x)|$ jest zbieżny

Przykładem ciągu funkcyjnego, który jest zbieżny to $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Z kolei, na przykład; ciąg $f_n = x^n$ w przedziale $0 \leq x < 1$ nie jest zbieżny jednostajnie do (dowolnej) funkcji f , bo w pobliżu punktu $x = 1$ krzywe $y = x^n$ nie leżą dowolnie blisko prostej $y = 0$.

1.2 Szereg Funkcyjny

Niech $f_n(x)$ będzie ciągiem funkcji określonych na zbiorze E . Jeżeli dla każdego $x \in E$ szereg liczbowy $\sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ jest zbieżny, to funkcja $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(x)$ jest sumą szeregu funkcyjnego. Zbieżność ciągu a_n jest warunkiem koniecznym, ale nie wystarczającym dla zbieżności szeregu, lub inaczej, zbieżność szeregu implikuje zbieżność ciągu a_n . W sprawdzaniu zbieżności szeregu, bardzo przydaje się wzór na sumę szeregu geometrycznego, gdzie $|q| < 1$: $\frac{a_1}{1-q}$.

Jeżeli ciąg sum częściowych $S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$ jest zbieżny jednostajnie, to mówimy, że szereg tworzony przez ten ciąg jest zbieżny jednostajnie. Suma szeregu jednostajnie zbieżnego jest ciągła.

1.3 Twierdzenie Arzeli-Ascoli'ego

Jeżeli f_n jest ciągiem funkcji rzeczywistych określonych na przedziale zwartym, który jest wspólnie ograniczony i jednakowo ciągły, to zawiera on podciąg zbieżny jednostajnie.

1.4 Ciągłość granicy

Jeżeli ciąg $f_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w A i funkcje $f_n(x)$ są funkcjami ciągłymi w punkcie $x_0 \in A$, to funkcja graniczna $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$ jest ciągła w punkcie x_0 .

1.5 Ciągłość a całka

Jeśli f_n jest ciągiem funkcji ciągłych, to:

- Dla zbieżnego jednostajnie ciągłego ciągu $f_n(x)$:

$$\int_E f(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n(x)dx$$

- Dla zbieżnego jednostajnie ciągłego $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$:

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_E \sum_{k=1}^n f_k(x)dx$$

1.6 Kryteria zbieżności

1.6.1 Kryterium porównawcze Weierstrassa

Jeśli szereg liczbowy utworzony z ciągu a_n o wyrazach nieujemnych jest zbieżny oraz dla każdego $x \in E$ zachodzi nierówność $|f_n(x)| < a_n$, to szereg funkcyjny $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ jest bezwzględnie jednostajnie zbieżny na E .

1.6.2 Kryterium Dirichleta

Jeżeli $b_n \rightarrow 0$ i jeśli sumy częściowe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ są ograniczone, to $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest zbieżny.

1.6.3 Kryterium Abela

Niech $a_n(x)$ oraz $b_n(x)$ będą ciągami funkcyjnymi określonymi w zbiorze A . Jeśli ciąg a_n jest monotoniczny dla każdego x , oraz jest ciągiem wspólnie ograniczonym oraz szereg $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ jest jednostajnie zbieżny w A . Wtedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ jest jednoznacznie zbieżny w A .

2 Szeregi potęgowe

$$S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

2.1 Twierdzenie Cauchy'ego-Hadamarda

Dla szeregu potęgowego $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, niech $\lambda = \limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Wtedy promieniem zbieżności szeregu potęgowego jest $R = \frac{1}{\lambda}$. Za wyjątkiem $\lambda = 0$, gdzie $R = \infty$, oraz $\lambda = \infty$, gdzie $R = 0$. Szereg jest zbieżny dla $|z - z_0| < R$ i rozbieżny dla $|z - z_0| > R$. Zbieżność w punkcie $z = z_0$ zależy od ciągu a_n .

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

2.2 Wzór Eulera

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Możemy też ten wzór dalej rozwijać, wiedząc, że:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

2.3 Szeregi Taylora

$$\begin{aligned}\sin x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} \\ \cos x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \\ e^x &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

3 Przestrzenie metryczne

Jeżeli na zbiorze X określono funkcję $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$, która spełnia następujące warunki:

1. $d(x, x) = 0$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

to (X, d) nazywamy przestrzenią metryczną.

3.1 Zbieżność w przestrzeni metrycznej

Mówimy, że ciąg x_n jest zbieżny do x w przestrzeni metrycznej (X, d) , jeśli $\lim_{n \rightarrow \infty} d(x_n, x) = 0$.

3.2 Twierdzenie Banacha o punkcie stałym

Mówimy, że funkcja $f : X \rightarrow X$ jest kontrakcją, jeśli istnieje taka liczba $L \in (0, 1)$, że dla każdego $x, y \in X$ zachodzi

$$d(f(x), f(y)) \leq Ld(x, y)$$

Jeśli X to przestrzeń metryczna, a f jest kontrakcją ze stałą $L \in (0, 1)$, to f ma punkt stały x_0 w X . x_0 jest granicą ciągu $x_1 \in X$, $x_{n+1} = f(x_n)$. Co więcej:

$$d(x_n, x_0) \leq \frac{L^{n-1}}{1-L} d(x_2, x_1)$$

4 Szeregi Fouriera

Jeżeli szereg trygonometryczny

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

jest zbieżny jednostajnie do funkcji f na przedziale $[-\pi, \pi]$, to

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$$

Jeśli f jest parzysta, to $b_n = 0$, w przeciwnym wypadku $a_n = 0$.

Alternatywnie, możemy użyć postaci zespolonej:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

gdzie:

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \begin{cases} \frac{a_n - ib_n}{2} & \text{jeśli } n > 0 \\ \frac{a_{-n} + ib_{-n}}{2} & \text{jeśli } n < 0 \end{cases}$$

4.1 Funkcja kawałkami gładka

Mówimy, że funkcja f ma nieciągłość skokową w punkcie x_0 , gdy istnieją granice jednostronne:

$$f(x_0+) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x), f(x_0-) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$$

Oraz $f(x_0+) \neq f(x_0-)$.

Mówimy, że funkcja f jest kawałkami gładka, jeśli w dowolnym przedziale $[a, b]$ jest ciągła poza skończoną liczbą punktów przedziału (a, b) , jej punkty nieciągłości są punktami skokowymi, a pochodna funkcji jest ciągła poza skończoną liczbą punktów przedziału (a, b) .

4.2 Zbieżność szeregów Fouriera

Jeżeli funkcja 2π okresowa f jest kawałkami gładka na \mathbb{R} , to jej szereg Fouriera jest zbieżny dla dowolnego $x \in \mathbb{R}$ do wartości:

$$\frac{f(x-) + f(x+)}{2}$$

Naturalnie, to oznacza, że jeśli f jest ciągła w x , to szereg Fouriera jest zbieżny do wartości $f(x)$.

5 Funkcje wielu zmiennych

Funkcje $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ są funkcjami wielu zmiennych. Z reguły tutaj będziemy rozważać funkcjami dla $m = 1$ i $n = 2$, lecz czasami potworki się zdarzają.

5.1 Granica

Dla $A \subset \mathbb{R}^n$, oraz $x_n \in A$ i $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$, mówimy, że $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ ma granicę w x_0 równą g ;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = g$$

gdy dla każdego ciągu $x_n \in A$, zachodzi:

$$x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x_0 \Rightarrow f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} g$$

Lub; funkcja ma granicę w punkcie x_0 równą g , gdy jej wartości dla punktów zbliżających się do x_0 zbiegają do g .

W tym zagadnieniu szczególnie istotne są niektóre triki stosowane w dowodach. Funkcja f ograniczona przez funkcję g ($f(x) \leq g(x)$ dla $x \in A$), co implikuje, że $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$. Również, bardzo łatwo udowodnić brak istnienia granicy, chociażby poprzez kontrprzykład. Wystarczy znaleźć dwa ciągi o różnej wartości granicznej f . $(\frac{1}{n}, 0)$ i $(\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ to bezpieczne przykłady. Warto też wspomnieć, o uproszczeniu przez ograniczenie, gdzie dla funkcji wielu zmiennych $f(x, y)$, definiujemy $u_n = \max\{x_n, y_n\}$, upraszczamy wzór funkcji i w szczególnych przypadkach pozwala nam to na uproszczenie dowodu.

5.2 Ciągłość

Funkcja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jest ciągła w punkcie x_0 , jeśli:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

5.3 Pochodna cząstkowa

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j^2}(x_1, \dots, x_n)$$

Z tw. Schwarz'a mamy, że jeśli drugie pochodne cząstkowe są ciągle w okolicy x_0 , to w tej okolicy mamy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x_0)$$

Zatem jeśli masz miłą funkcję, to możesz w dowolnej kolejności różnicować.

5.4 Gradient

$$\nabla f(x_1, \dots, x_n) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \right)$$

5.5 Pochodna

$U \subset \mathbb{R}^n$. Mówimy, że funkcja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ jest różniczkowalna w punkcie x_0 , jeśli istnieje przekształcenie liniowe $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, takie, że:

$$\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) - A(h_1, \dots, h_n)}{\|(h_1, \dots, h_n)\|} = 0$$

$A(h_1, \dots, h_n)$ nazywamy $f'(x_1, \dots, x_n)$, a $\|(h_1, \dots, h_n)\|$ to długość wektora $\sqrt{h_1^2 + \dots + h_n^2}$.

Jeśli f ma pochodną w punkcie x_0 to:

$$f'(x_1, \dots, x_n)(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \dots, x_n) h_i$$

Dla większej ilości wymiarów; $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$:

$$\lim_{(h_1, \dots, h_n) \rightarrow (0, \dots, 0)} \frac{\|f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) - f'(h_1, \dots, h_n)\|}{\|(h_1, \dots, h_n)\|} = 0$$

$$f' = (f'_1, \dots, f'_m)$$

5.6 Macierz Jacobiego

Jeżeli funkcja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^m$ ma pochodną w punkcie x_0 , to f' jest odwzorowaniem liniowym. Jego macierz nazywamy macierzą Jacobiego. Jakobian to wyznacznik tej macierzy.

5.7 Ekstrema lokalne

Warunkiem koniecznym tego, że punkt x_0 jest ekstremum lokalnym, jest spełnienie warunku:

$$\nabla f(x_0) = (0, \dots, 0)$$

Jednak należy też sprawdzić, czy rzeczywiście ten punkt jest ekstremum lokalnym. Punkt jest ekstremum lokalnym, jeśli w otoczeniu U punktu zachodzi:

$$\forall u \in U f(u) \leq f(x_0)$$

Jeśli nierówność jest ostra to mówimy, że jest to ekstrmum ściśle.

Warunkiem dostatecznym tego, że punkt (x_0, y_0) jest ekstremum lokalnym, jest spełnienie warunku:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (0, \dots, 0) \wedge H(x_0, y_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{vmatrix} > 0$$

Jeśli którakolwiek pochodna cząstkowa drugiego rzędu jest ujemna to punkt jest minimum lokalne. W p.p. jest to maksimum lokalne. Jeżeli $H(x_0, y_0) < 0$ to ekstremum nie ma, a jeśli $H(x_0, y_0) = 0$ to nie wiadomo.

5.8 Całki

Jeśli $f(x, y)$ jest funkcją ciągłą na prostokącie $R = [a, b] \times [c, d]$, to całkę podwójną można obliczyć przez całki iterowane:

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx$$

nazywamy to twierdzeniem Fubinięgo.

5.8.1 Całka przez rozszerzenie funkcji

Jeśli f jest zdefiniowane na $D \subset \mathbb{R}^2$, to można całkować po rozszerzeniu f^* funkcji f .

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{jeśli } (x, y) \in D \\ 0 & \text{w przeciwnym wypadku} \end{cases}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_R f^*(x, y) dx dy$$

5.8.2 Zbiór normalny

Obszar normalny względem osi x to zbiór punktów (x, y) , dla których:

$$\begin{cases} a \leq x \leq b \\ f(x) \leq y \leq g(x) \end{cases}$$

Obszar normalny względem osi y to zbiór punktów (x, y) , dla których:

$$\begin{cases} c \leq y \leq d \\ h(y) \leq x \leq k(y) \end{cases}$$

5.8.3 Całka po zbiorze normalnym

$$D = \{(x, y) : a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq g(x)\}$$

gdzie $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ są ciągłe. Dla dowolnej $h : D \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\iint_D h(x, y) dx dy = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} h(x, y) dy \right) dx$$

5.8.4 Obszary regularne

Suma skończonej ilości zbiorów normalnych, parami rozłącznych, jest obszarem regularnym. Dla zbioru regularnego $D = D_1 \cup D_2 \cup \dots \cup D_n$:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x, y) dx dy$$

5.8.5 Współrzędne biegunowe

$$D = \{(r \cos \alpha, r \sin \alpha) : r_1 \leq r \leq r_2; 0 \leq \alpha_1 \leq \alpha \leq \alpha_2 \leq 2\pi\}$$

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{[r_1, r_2] \times [\alpha_1, \alpha_2]} f(r \cos \alpha, r \sin \alpha) r dr d\alpha$$