

1 Przestrzeń wektorowa

Przestrzeń wektorowa V nad ciałem K to:

- $(V, +)$ - grupa abelowa, $+$ - dodawanie wektorów
- (K, \oplus, \odot) - ciało, \oplus - dodawanie skalarów, \odot - mnożenie skalarów
- $\cdot : K \times V \rightarrow V$ - mnożenie wektorów
- $\alpha \cdot (v_1 + v_2) = \alpha \cdot v_1 + \alpha \cdot v_2$
- $(\alpha_1 \oplus \alpha_2) \cdot v = \alpha_1 \cdot v + \alpha_2 \cdot v$
- $\alpha_1 \cdot (\alpha_2 \cdot v) = (\alpha_1 \odot \alpha_2) \cdot v$
- $1 \cdot v = v$

Intuicyjnie, jest to ciało skalarów i grupa wektorów z dodatkowym działaniem. Przestrzenią wektorową może być wiele rzeczy. Od wielowymiarowych ciał \mathbb{R}^n , poprzez bajty (\mathbb{F}_2^8), aż po funkcje w ramach szeregów Fourier'a.

1.1 Powłoka liniowa

Dla $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, czyli zbioru wektorów z V nad K , zbiór wszystkich kombinacji liniowych:

$$\text{span}(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in K\}$$

nazywamy powłoką zbioru S . Intuicyjnie, jest to zbiór skalarów odpowiadających pewnym wektorom z V . Mnożymy skalary z wektorami i dostajemy nowy wektor, powstały z kombinacji liniowej. Wszystkie takie wektory tworzą powłokę liniową.

Inaczej, powłoka liniowa to najmniejsza podprzestrzeń V , zawierająca wszystkie wektory z S . Mówimy, że wektory z S rozpinają podprzestrzeń V , równoważną $\text{span}(S)$.

1.2 Liniowa niezależność

Podzbiór S z V nad K jest liniowo niezależny, jeśli dla dowolnego podzbioru $S' \subseteq S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ i dowolnych $\alpha_1, \alpha_2 \in K$:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0 \rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$$

Intuicyjnie, jeśli nie da się wyrazić dowolnego wektora z S jako kombinacji liniowej innych wektorów z S , to S jest liniowo niezależny. Jeśli da się wyrazić dowolny wektor z S przy pomocy innych wektorów z S , to da się też zsumować dowolnie te wektory do zera, tak, że skalary nie są równe zero.

1.3 Baza

Baza B przestrzeni V , to liniowo niezależny $B \subseteq V$, który rozpiną przestrzeń V .

Inaczej, jest to zbiór wektorów liniowo niezależnych, czyli takich których nie da się wyrazić przy pomocy siebie, przy pomocy których można wyrazić dowolny wektor z V jako kombinację liniową. Można o bazie myśleć jako o zbiorze elementarnych wartości, bloków budulcowych.

1.4 Przekształcenia liniowe

Niech U i V będą przestrzeniami wektorowymi nad K . Funkcję $T : U \rightarrow V$ nazywamy przekształceniem liniowym, jeśli dla dowolnych $\alpha_1, \alpha_2 \in K$ i dowolnych $u_1, u_2 \in U$:

$$T(\alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2) = \alpha_1 T(u_1) + \alpha_2 T(u_2)$$

1.5 Zmiana bazy

Dla przestrzeni U z bazą $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, oraz V z bazą $S' = \{w_1, w_2, \dots, w_m\}$, macierzą przekształcenia liniowego $T : U \rightarrow V$ nazywamy $M_S^{S'} = [m_{ij}] \in K^{m \times n}$.

$$T(v_j) = \sum_{i=1}^m m_{ij} w_i$$

Intuicyjnie, w j -tej kolumnie macierzy $M_S^{S'}$ stoją współrzędne wektora v_j w bazie S' .

Współrzędne wektora $v \in V$ w bazie S' to $\langle v \rangle_{S'} = M_S^{S'} \langle v \rangle_S$, dla danych koordynatów w bazie S $\langle v \rangle_S$.

Macierzą przejścia dla przestrzeni V z bazą S i U z bazą S' , oraz macierzą przekształcenia $M_S^{S'}$ jest macierz $M_S^{S'}(Id_S), Id_V : V \rightarrow V$.

1.6 Własności

Śladem macierzy A nazywamy $\text{tr } A$; gdzie:

$$\text{tr } A = \sum_{i=1}^n a_{ii}$$

Jądrem nazywamy zbiór wektorów (punktów), które są przekształcane w zero.

$$\ker T = \{v \in V : T(v) = 0\}$$

Dla $T : V \rightarrow W$, obrazem jest podzbiór przestrzeni W , składający się z wektorów, które można otrzymać z $T(v) : v \in V$.

$$\text{Im } T = T(V) = \{w \in W : \exists v \in V T(v) = w\}$$

Intuicyjnie, obrazem jest kontrdziedzina przekształcenia; wszystkie wartości co może nam zwrócić. Aby znaleźć obraz macierzy, zawsze można sprawdzić, czy jej wektory kolumnowe nie są liniowo niezależne, jeśli są, to tworzą one bazę obrazu, i obrazem jest dowolna ich kombinacja liniowa.

$$\dim V = \dim \text{Ker } T + \dim \text{Im } T$$

2 Wektory własne

Dla przestrzeni V nad ciałem K , z przekształceniem $T : V \rightarrow V$, jeśli dla niezerowego $v \in V$ spełnione jest:

$$Tv = \lambda v$$

gdzie $\lambda \in K$, to v nazywamy wektorem własnym dla odpowiadającej wartości własnej λ . Tu się przydaje notacja Diraca; $v_\lambda = |\lambda\rangle$. Intuicyjnie, wektor własny operatora (macierzy), po wrzuceniu do operatora może zwrócić tylko przeskalowany ten sam wektor. Odwrócenie macierzy nieosobliwej, odwraca też jej wartości własne.

$$\prod_i \lambda_i = \det A$$

Z powyższego można wyprowadzić wzór na wartości własne; oraz zdefiniować wielomian charakterystyczny:

$$\det(A - \lambda I) = 0 = p_T(\lambda)$$

$$(T - \lambda I)v_\lambda = 0$$

Wektor $|m\rangle$ nazywamy uogólnionym wektorem własnym rzędu m macierzy A dla wartości własnej λ jeśli $(A - \lambda I)^m |m\rangle = 0$, oraz $(A - \lambda I)^{m-1} |m\rangle \neq 0$.

$$|n-1\rangle = (A - \lambda I) |n\rangle$$

2.1 Własności

Wartości własne macierzy:

- rzeczywistych symetrycznych są rzeczywiste
- hermitowskich też są rzeczywiste
- antysymetrycznych i antyhermitowskich są czysto urojone
- unitarnych są zespolone i $|\lambda| = 1$

Wektory własne macierzy normalnych są ortogonalne, lub ortonormalne, więc można z nich zbudować bazę. To oznacza, że można je zawsze diagonalizować, i diagonalizacja jest wyrażeniem tych macierzy w bazie swoich wektorów własnych.

Zbiór wszystkich wartości własnych A nazywamy jej widmem (spektrum) i oznaczamy $\sigma(A)$.

2.2 Twierdzenie Gerszgorina

Każda z wartości własnych macierzy kwadratowej zespolonej wewnątrz lub na okręgu jedno z kół w środku w a_{ii} o promieniu:

$$R_i = \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$$

2.3 Wielomian charakterystyczny

Dla wielomianu charakterystycznego:

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)^{k_1} (t - \lambda_2)^{k_2} \dots (t - \lambda_m)^{k_m}$$

liczbę $k_i : i \leq m$ nazywamy krotnością wartości własnej λ_i . Jeśli da się zapisać $p_A(t) = c_n t^n + \dots c_0$, to:

$$c_n = 1, \operatorname{tr} A = -c_{n-1}, \det A = (-1)^n c_0$$

2.3.1 Twierdzenie Cayleya-Hamiltona

Każda macierz kwadratowa nad \mathbb{R} lub \mathbb{C} jest pierwiastkiem swojego wielomianu charakterystycznego.

$$p_A(A) = 0$$

Dla $p_A(t) = t^2 - 5A - 2I$, możemy bardzo łatwo określić wysokie potęgi A lub jej odwrotność:

$$p_A(A) = A^2 - 5A - 2I = 0 \Rightarrow A^2 = 5A + I \Rightarrow A^4 = (5A + I)^2$$

$$p_A(A) = 0 \Rightarrow A^2 A^{-1} - 5 - 2A^{-1} = 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{A - 5I}{2}$$

2.3.2 Wielomian Minimalny

Wielomian minimalny to wielomian $p_A(t)$, który spełnia warunek $p_A(A) = 0$, oraz którego współczynnik przy najniższej potęgze wynosi 1. Każda macierz ma wielomian minimalny stopnia równego wielomianowi charakterystycznemu. Macierz A jest diagonalizowalna tylko wtedy, gdy q_A ma pierwiastki jednorodne. Dzielnikami elementarnymi $f_i(\lambda)^{m_i}$ macierzy A nazywamy potęgi nierozkładalnych wielomianów pojawiające się w rozkładzie wielomianu minimalnego na czynniki.

$$q_A(\lambda) = f_1(\lambda)^{m_1} f_2(\lambda)^{m_2} \dots f_k(\lambda)^{m_k}$$

2.4 Macierze podobne

Macierze kwadratowe A i B nazywamy podobnymi $A \sim B$, jeśli istnieje P , takie, że:

$$PAP^{-1} = B$$

Intuicyjnie, macierze są podobne jeśli da się je sprowadzić do siebie przez jedną macierz. Jeśli $A \sim B$ to $p_A(t) = p_B(t)$.

2.5 Diagonalizacja

Macierz można zdiagonalizować tylko jeśli:

- Jej wielomian charakterystyczny rozkłada się na iloczyn czynników liniowych
- Krotność geometryczna każdej wartości własnej odpowiada jej krotności algebraicznej

2.5.1 Komutacja

Macierze można jednocześnie diagonalizować, tylko jeśli ze sobą komutują: $AB = BA$, $[A, B] = 0$. Jednoczesna diagonalizacja oznacza istnienie jednej bazy ortonormalnej, w której obie macierze przyjmują postać diagonalną. Wektory tej bazy są więc wektorami własnymi zarówno A , jak i B .

Zatem, jeśli mamy dwie komutujące macierze $[A, B] = 0$, to wiemy, że istnieje macierz S , która:

$$S^{-1}AS = \text{diag}(\lambda_1(A), \dots) \quad S^{-1}BS = \text{diag}(\lambda_1(B), \dots)$$

Wiemy też, że B i A mają zbiór wspólnych wektorów własnych, oraz, że S to zestawienie kolumnowe tych właśnie wspólnych wektorów własnych.

2.5.2 Funkcje macierzowe

Jeżeli funkcja ma rozwinięcie w szereg, jak np.: e^x , to można założyć, że:

$$e^A = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \dots)$$

$$\sin A = \text{diag}(\sin \lambda_1, \dots)$$

3 Klatka Jordana

Macierz rozmiaru $k \times k$, postaci:

$$J_k(\lambda) = \begin{bmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

nazywamy klatką Jordana. Każda macierz kwadratowa A o elementach z \mathbb{C} jest podobna do macierzy klatkowo-diagonalnej. Macierz klatkowo diagonalną można zdefiniować jako macierz diagonalną, z kolejnymi J_1, \dots, J_k na diagonalni.

Forma Jordana to macierz z kolejnymi klatkami Jordana na diagonalni.

$$J = J_1 \oplus J_2 \dots J_k$$

4 Przestrzenie Hilberta

*Nie wiem kim był ten Hilbert, że potrzebował tyle przestrzeni, ale na pewno był **wielkim** człowiekiem.*

4.1 Iloczyn skalarny

Dla przestrzeni wektorowej V nad ciałem K , iloczynem skalarnym nazywamy odwzorowanie $\langle \cdot | \cdot \rangle : V \times V \rightarrow K$, spełniające warunki:

1. $\langle x | y \rangle = \overline{\langle y | x \rangle}$
2. $\langle x | \alpha y + \beta z \rangle = \alpha \langle x | y \rangle + \beta \langle x | z \rangle$
3. $\langle x | y \rangle = 0 \rightarrow x = 0$
4. $\langle x | y \rangle \geq 0$

4.1.1 Iloczyn zewnętrzny

Iloczynem zewnętrznym $\otimes : V \times W \rightarrow L(V, W)$ nazywamy odwzorowanie liniowe $V \rightarrow W$, zadane przez $(v \otimes w)(x) = \langle v|x \rangle w$

4.2 Przestrzeń dualna

Dla przestrzeni wektorowej V nad ciałem K , zbiór wszystkich odwzorowań liniowych $T : V \rightarrow K$, zwanych funkcjonalami liniowymi, nazywamy przestrzenią dualną V i oznaczamy V^* .

Bardzo prostym funkcjonalem liniowym jest, na przykład:

$$f_z(x) = \langle z|x \rangle$$

Jeśli zdefiniujemy odwzorowanie $i : V \rightarrow V^*$, $i(z) = f_z$, czyli takie zwracające dla każdego wektora x , funkcjonal liniowy zwracający wartość iloczynu skalarnego z danym wektorem, to możemy powiedzieć, że $i(z)$ jest izomorfizmem.

4.3 Normy

Dla przestrzeni wektorowej V nad ciałem K , odwzorowanie $\|\cdot\| : V \rightarrow [0, \infty)$, nazywamy normą, jeśli spełnia następujące warunki:

1. $\|x\| = 0 \leftrightarrow x = 0$
2. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$
3. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Normy też spełniają drugą nierówność trójkąta:

$$|\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$$

4.3.1 Norma indukowana

Jeżeli V jest przestrzenią wektorową z iloczynem skalarnym $\langle \cdot | \cdot \rangle$ to:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x|x \rangle}$$

jest normą indukowaną przez iloczyn skalarny.

Normy indukowane spełniają regułę równoległoboku:

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2$$

4.3.2 Nierówność Cauchy'ego-Schwarza

$$|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$$

Kątem θ pomiędzy x i y nazywamy:

$$\langle x|y \rangle = \|x\| \|y\| \cos \theta$$

Jeśli $|\langle x|y \rangle| = 0$, to mówimy, że x i y są ortogonalne.

4.4 Przekształcenie unitarne

Przekształcenie liniowe $U : V \rightarrow W$, przestrzeni wektorowych V i W nad ciałem K , nazywamy unitarnym (ortogonalnym), jeśli dla dowolnych $x, y \in V$ zachodzi $\langle Ux|Uy \rangle_W = \langle x|y \rangle_V$. Macierz przekształcenia U jest unitarna.

Przekształcenia unitarne i ortogonalne zachowują kąty między wektorami. Klasycznym, zatem przekształceniem jest ortogonalnym jest macierz obrotu.

Jeśli $\|Tv\|_W = \|v\|_V$, to T nazywamy izometrią. Przekształcenia unitarne i ortogonalne są izometriami.

4.5 Metryka

Dla przestrzeni wektorowej V , metryką nazywamy funkcję $d : V \times V \rightarrow [0, \infty)$, spełniającą warunki:

1. $d(a, b) = 0 \Leftrightarrow a = b$
2. $d(a, b) = d(b, a)$
3. $d(a, b) \leq d(a, c) + d(b, c)$

Metrykę zadaną przez $d(x, y) = \|x - y\|$ nazywamy metryką indukowaną przez normę.

4.6 Przestrzeń zupełna

Niech a_i będzie ciągiem elementów przestrzeni metrycznej (X, d) . Mówimy, że ten ciąg jest ciągiem Cauchy'ego, jeśli:

$$\forall \epsilon > 0 \exists N \in \mathbb{N} \forall m, n > N d(a_m, a_n) < \epsilon$$

lub, dla każdego epsilon, istnieje takie N , po którym wszystkie elementy są bliżej do siebie nawzajem niż ten epsilon.

Przestrzeń wektorową z metryką nazywamy przestrzenią zupełną, jeśli każdy zdefiniowany w niej ciąg Cauchy'ego ma granicę należącą do tej przestrzeni.

Dwie normy $\|\cdot\|_A$ i $\|\cdot\|_B$ zdefiniowane na przestrzeni V nazywamy równoważnymi, jeśli istnieją takie stałe $c, C > 0$, że dla każdego $v \in V$ $c\|v\|_A \leq \|v\|_B \leq C\|v\|_A$

4.7 Definicja

Przestrzeń wektorowa nad ciałem liczb rzeczywistych lub zespolonych z iloczynem skalarnym indukującym metrykę zupełną nazywamy przestrzenią Hilberta.

4.8 Macierze gęstości

Macierzą gęstości (operatorem stanu) nazywamy operator ρ spełniający:

1. $\rho = \rho^\dagger$
2. $\rho \geq 0$
3. $\text{tr} \rho = 1$

Stan mieszany to wypukła kombinacja stanów czystych:

$$\rho = \sum_i p_i |\psi_i\rangle\langle\psi_i|$$

gdzie, oczywiście, z definicji fizycznej; $p_i \geq 0$ i $\sum_i p_i = 1$.

Stan jest czysty wtedy i tylko wtedy gdy:

$$\text{tr}(\rho^2) = 1$$

Dla stanów mieszanych $\text{tr}(\rho^2) < 1$.

Pomiar rzutowy opisuje zbiór ortogonalnych projektorów $\{P_i : P_i = |i\rangle\langle i|\}$, spełniających relację zupełności: $\sum_i P_i = I$. Prawdopodobieństwo uzyskania wyniku i , $p(i) = \langle\psi|P_i|\psi\rangle = |\langle i|\psi\rangle|^2$.

Wartość średnią obserwabli A w stanie ρ obliczamy jako:

$$\langle A \rangle = \text{tr}(\rho A)$$

4.8.1 Sfera Blocha

Dowolną macierz gęstości kubitów można zapisać jako:

$$\rho = \frac{1}{2}(I + x\sigma_x + y\sigma_y + z\sigma_z) = \frac{1}{2}(I + \vec{r} \cdot \vec{\sigma})$$

\vec{r} nazywamy wektorem Blocha, a σ to macierze Pauliego.

5 Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Dany jest niezależny zbiór wektorów $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$. Ta procedura pozwala zmienić go w zbiór wektorów parami ortogonalnych.

1. $u_1 = v_1$
2. $u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{\langle u_j | v_k \rangle}{\langle u_j | u_j \rangle} u_j$
3. Wektory $\{u_k\}$ są ortogonalne, aby stworzyć z nich bazę, trzeba je znormalizować $e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$

6 Rozkład QR

Dla macierzy $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ jej rozkład QR to faktoryzacja:

$$A = QR$$

gdzie $Q \in \mathbb{C}^{m \times n}$ jest macierzą z ortonormalnymi kolumnami, a $R \in \mathbb{C}^{n \times n}$ jest macierzą górnotrójkątną. Jeżeli A jest kwadratowa to Q jest unitarna.

6.1 Ortogonalizacja Grama-Schmidta

Niech $A = [a_1, a_2, \dots, a_n]$, gdzie a_i to kolejne kolumny. Wtedy:

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1, & q_1 &= \frac{u_1}{\|u_1\|} \\ u_2 &= a_2 - \langle q_1 | a_2 \rangle q_1, & q_2 &= \frac{u_2}{\|u_2\|} \\ u_3 &= a_3 - \langle q_1 | a_3 \rangle q_1 - \langle q_2 | a_3 \rangle q_2, & q_3 &= \frac{u_3}{\|u_3\|} \\ & \vdots & & \\ u_n &= a_n - \sum_{i=1}^{n-1} \langle q_i | a_n \rangle q_i, & q_n &= \frac{u_n}{\|u_n\|} \end{aligned}$$

$Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]$, a $R = Q^\dagger A$

6.2 Wyznaczanie wartości własnych

$$A = Q_1 R_1$$

$$A_k = Q_k R_k, \quad A_{k+1} = R_k Q_k$$

A_k zbiega do macierzy górnotrójkątniej, której elementy diagonalne to wartości własne macierzy A .

7 Normy macierzowe

Normę operatorową $\|\cdot\|$ nazywamy normę macierzową indukowaną przez normę wektorową $\|A\| = \max_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$.

Norma macierzowa jest niezdegenerowana, jeśli $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = 0$. Norma jest dodatnio jednorodna, jeśli: $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$

7.1 Własności

- Normę macierzową $\|\cdot\|$ nazywamy semimultiplikatywną jeśli dla wszystkich macierzy kwadratowych A i B mamy $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$.
- Każda semimultiplikatywna norma macierzowa $\|\cdot\|$ jest zgodna z pewną normą wektorową $\|\cdot\|_W$, czyli $\|Ax\|_W \leq \|A\| \|x\|_W$

7.2 Wskaźnik uwarunkowania macierzy

$$\kappa(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|$$

Można interpretować $\kappa(A)$ jako miarę wrażliwości rozwiązania układu $Ax = b$ na zaburzenia w A i b .

8 Iloczyn Tensorowy

Niech V i W będą przestrzeniami wektorowymi o bazach: $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_n\rangle\}$, oraz $\{|f_1\rangle, |f_2\rangle, \dots, |f_m\rangle\}$. Ich iloczyn tensorowy $V \otimes W$ jest przestrzenią o bazie:

$$\{|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}$$

Czasami stosuje się skróconą notację:

$$|e_i\rangle \otimes |f_j\rangle \equiv |e_i\rangle |e_j\rangle \equiv |e_i f_j\rangle$$

8.1 Stany splątane

Układ kwantowy, opisany przez stan $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ jest splątany, jeśli nie da się go zapisać w postaci iloczynu tensorowego:

$$|\psi\rangle \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$$

Stany, które można zapisać w tej postaci, nazywamy separowalnymi lub produktowymi.

8.2 Iloczyn Kroneckera

Dla macierzy $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ oraz $B \in \mathbb{C}^{p \times q}$ iloczyn Kroneckera $A \otimes B$ jest macierzą o wymiarach $mp \times nq$, zdefiniowaną jako:

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \cdots & a_{1n}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \cdots & a_{2n}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & a_{m2}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

8.3 Wyśladowywanie podukładu

Dla stanu gęstości ρ_{AB} układu złożonego $A \otimes B$, partial trace względem podukładu B definiujemy jako:

$$\rho_A = \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_j (\mathbb{I}_A \otimes \langle j|) \rho_{AB} (\mathbb{I}_A \otimes |j\rangle)$$

8.4 Miary splątania

Miarę splątania układu AB zwaną entropią (von Neumanna) splątania liczymy jako:

$$S(\rho_A) = -\text{tr}(\rho_A \log \rho_A)$$

9 Forma Kwadratowa

Forma kwadratowa q na przestrzeni wektorowej V nad ciałem K to funkcja

$$q : V \rightarrow K$$

dla której istnieje symetryczna forma dwuliniowa $B : V \times V \rightarrow K$ spełniająca:

$$q(v) = B(v, v) : v \in V$$

$$B(v, w) = \frac{q(v+w) - q(v) - q(w)}{2}$$

Macierzą formy kwadratowej q nazywamy taką macierz, że $q(x) = x^T A x$. A zawsze można dobrać, tak, aby była symetryczna, albowiem:

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

$$x^T \frac{A - A^T}{2} x = (x^T \frac{(A - A^T)^T}{2} x)^T = -x^T \frac{A - A^T}{2} x = 0$$

9.1 Określoność

Forma kwadratowa dana wzorem

$$q(x) = x^T Ax$$

gdzie A jest symetryczna $n \times n$, jest:

- dodatnio określona gdy $q(x) > 0 : x \neq 0$
- ujemnie określona gdy $q(x) < 0 : x \neq 0$
- nieokreślona gdy $q(x) > 0 \wedge q(y) < 0$
- dodatnio półokreślona gdy $q(x) \geq 0$
- ujemnie półokreślona gdy $q(x) \leq 0$

Alternatywnie, można rozważać określoność zależnie od wartości własnych A :

- dodatnio określona jeśli $\lambda_i > 0$
- ujemnie określona jeśli $\lambda_i < 0$
- nieokreślona jeśli $\text{sgn}(\lambda_i) \neq \text{sgn}(\lambda_j)$
- półokreślona jeśli $\lambda_i \geq 0$ lub $\lambda_i \leq 0$

Na podstawie kryterium Sylwestera:

- q jest dodatnio określona jeśli wszystkie główne minory A są dodatnie:

$$\det(A_1) > 0, \dots, \det(A_n) > 0$$

- q jest ujemnie określona jeśli minory są na przemian dodatnie i ujemne

$$\det(A_1) < 0, \det(A_2) > 0, \dots$$

9.2 Postać diagonalna

Dla każdej formy kwadratowej $q = x^T Ax$ o charakterystyce różnej od 2 istnieje nieosobliwa macierz S taka, że $S^T AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$. W przypadku, gdy $K = \mathbb{R}$, S można zawsze dobrać, tak aby była ortogonalna.

Macierze A, B nazywamy kongruentnymi, jeżeli istnieje taka nieosobliwa macierz C , że $C^T AC = B$. Dowolne dwa nieosobliwe przekształcenia rzeczywistej formy kwadratowej $q = x^T Ax$ do postaci diagonalnej

$$S^T AS = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

$$R^T AR = \text{diag}(\lambda'_1, \dots, \lambda'_n)$$

prowadzą do jednakowej liczby dodatnich, ujemnych i zerowych elementów na diagonalu.

10 Rozkład LU

Wiodącym minorem głównym M_l nazywamy wyznacznik z kwadratowego lewego górnego rogu macierzy o pewnym rozmiarze $l \leq n$. $M_n(A) = \det A$.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad M_1(A) = [a_{11}], \quad M_2(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \dots \quad M_l(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1l} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2l} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{ll} \end{vmatrix}$$

Jeżeli wszystkie M_l macierzy kwadratowej A są niezerowe, to A można jednoznacznie rozłożyć na iloczyn macierzy dolnotrójkątnej L , i górnortrójkątnej U .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$$u_{11} = a_{11}, \quad a_{21} = l_{21}u_{11}$$

10.1 Kryterium Sylvestra

Minorem głównym (nie-wiodącym) jest wyznacznik z macierzy bez i -tego wiersza i kolumny. Minory wiodące główne, też są konwencjonalnie główne, albowiem są zwykłymi minorami głównymi, z $i = \{j : j > l\}$.

Jest to zbiór kryteriów, które pozwalają na podstawie wiodących minorów głównych M_l określić określoność macierzy symetrycznej A :

- dodatnio określona $\leftrightarrow M_l > 0 : l \leq n$
- ujemnie określona $\leftrightarrow M_1 < 0 \wedge M_2 > 0, M_3 < 0, \dots$
- dodatnio półokreślona \leftrightarrow wszystkie minory główne są nieujemne
- ujemnie półokreślona \leftrightarrow wszystkie minory główne rzędu nieparzystego są nieujemne
- nieokreślona w p.p.

10.2 Rozkład Cholesky'ego-Banachiewicza

Każdą rzeczywistą, symetryczną macierz dodatnio określonej formy kwadratowej można zapisać jako iloczyn macierzy dolnotrójkątnej i jej transpozycji, co znacznie upraszcza operację znajdowania LU .

10.2.1 Własności macierzy dolnotrójkątnych

- L^{-1} też jest dolnotrójkątna
- $(LL^T)^{-1} = (L^T)^{-1}L^{-1} \quad (LL')^{-1} = L'^{-1}L^{-1}$
- Rozwiązywanie $Lx = b$ jest trywialne, przez strukturę L

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} 1 \cdot x_1 = b_1 \\ l_{21}x_1 + x_2 = b_2 \\ \vdots \\ l_{n1}x_1 + l_{n2}x_2 + \cdots + x_n = b_n \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = b_1 \\ x_2 = b_2 - l_{21}b_1 \\ \vdots \\ x_n = b_n - l_{n1}x_1 - l_{n2}x_2 - \cdots \end{array}$$

- Z powyższego, widać też, że rozwiązywanie $L^T x = b \Rightarrow Ux = b$ jest trywialne

10.3 Równania

$$B = LL^T$$

$$Bx = b \Rightarrow LL^T x = b \Rightarrow \mathbf{L}y = \mathbf{b} \quad \mathbf{L}^T \mathbf{x} = \mathbf{y}$$

11 Rozkład SVD

Każdą macierz rzeczywistą $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ można przedstawić jako:

$$A = U\Sigma V^*$$

gdzie $U \in \mathbb{C}^{m \times m}$ i $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ to macierze unitarne, a $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times n}$ to macierz diagonalna, z nieujemnymi liczbami na diagonalu.

Aby znaleźć rozkład SVD należy:

1. obliczyć $H = A^\dagger A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, jako macierz hermitowską półokreśloną
2. Znaleźć wartości własne λ_i wraz z odpowiadającymi wektorami własnymi $|i\rangle$ macierzy H
3. $V = [|1\rangle, |2\rangle, \dots, |n\rangle]$
4. Znajdź wartości osobliwe $\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$, $\Sigma_{ii} = \sigma_i$, $\Sigma_{ij} = 0 : j \neq i$
5. $u_i = \sigma_i^{-1} A |i\rangle : \sigma_i \neq 0, u_i \in \mathbb{C}^n$
6. $U = [u_1, u_2, \dots, u_m]$
7. Jeśli konieczne uzupełnij wartości U i V , ortogonalizacją Grama-Schidta

12 Równania Liniowe

Dla równania liniowego $Ax = b$, chcemy znaleźć rozwiązanie x . Dotychczas rozważaliśmy metody pozwalające na dokładne rozwiązanie, lecz takie rozwiązywanie ma złożoność $O(n^3)$.

Zamiast tego, można szukać rozwiązań przybliżonych. Celem wtedy, jest znalezienie takiej macierzy Q , dla której:

- $|k\rangle = (I - Q^{-1}A) |k-1\rangle + Q^{-1}b$
- $|0\rangle, |1\rangle, \dots, |k-1\rangle$ jest zbieżne do x .

Aby ciąg $|k\rangle \rightarrow x$, dla dowolnego $|0\rangle$, to:

$$\rho(I - Q^{-1}A) < 1$$

12.1 Metoda Richardsona

$$Q = \frac{I}{\omega} \quad |k\rangle = (I - \omega A) |k-1\rangle + \omega b$$

$$\rho(I - \omega A) < 1 \rightarrow |k\rangle \rightarrow x$$

12.2 Metoda Jacobiego

$$A = D + L + U \quad Q = D$$

$$|k\rangle = (I - D^{-1}A) |k-1\rangle + D^{-1}b$$

Metoda jest zbieżna, jeśli A jest silnie diagonalnie dominująca, lub:

$$(\rho(I - D^{-1}A) < 1) \rightarrow |k\rangle \rightarrow x$$

12.3 Metoda Gaussa-Seidla

$$A = D + L + U \quad Q = D + L$$

$$|k\rangle = (I - (D + L)^{-1}A) |k-1\rangle + (D + L)^{-1}b$$

Jeżeli macierz A jest diagonalnie dominująca, lub symetryczna i dodatnio okeślona, to metoda jest zbieżna.

12.4 Metoda Nadrelaksacji

$$A = D + L + U \quad Q = \frac{D}{\omega} + L \quad 0 < \omega < 2$$

$$|k\rangle = \left[I - \left(\frac{D}{\omega} + L \right)^{-1} A \right] |k-1\rangle + \left(\frac{D}{\omega} + L \right)^{-1} b$$

Metoda jest zbieżna, jeśli A jest symetryczna i dodatnio okeślona.

13 Rozkład Schmidta

Niech $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ będzie stanem kwantowym dwóch podukładów; A i B .

Rozkładem Schmidta nazywamy przedstawienie tego stanu w pewnych ortonormalnych bazach $\{|u_i\rangle\} \subset \mathcal{H}_A$ i $\{|v_i\rangle\} \subset \mathcal{H}_B$:

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^r \lambda_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle$$

gdzie $\lambda_i \in \mathbb{R}^+$, a r to ranga Schmidta; liczba niezerowych wyrazów w sumie.

$$\sum_i \lambda_i^2 = 1$$

Przykład 13.1

Niech: $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$. Wybieramy bazy $\{|j\rangle_A\}$ i $\{|k\rangle_B\}$.

$$|\psi\rangle = \sum_{j,k} M_{j,k} |j\rangle_A \otimes |k\rangle_B$$

Stosujemy rozkład SVD: $M = U\Sigma V^\dagger$, $M_{jk} = \sum_i U_{ji} \sigma_i V_{ik}^\dagger$

$$|\psi\rangle = \sum_i \sigma_i \left(\sum_j U_{ji} |j\rangle_A \right) \otimes \left(\sum_k V_{ik}^\dagger |k\rangle_B \right)$$

$$|u_i\rangle_A = \sum_j U_{ji} |j\rangle_A \quad |v_i\rangle_B = \sum_k V_{ik}^\dagger |k\rangle_B = \sum_k \overline{V_{ki}} |k\rangle_B$$

Dla $\lambda_i = \sigma_i$:

$$|\psi\rangle = \sum_i \lambda_i |u_i\rangle \otimes |v_i\rangle$$

13.1 Macierze gęstości

$$\rho_A = \text{Tr}_B |\psi\rangle \langle \psi| = \sum_{i,j} \lambda_i \lambda_j |u_i\rangle \langle u_j| \text{Tr}(|v_i\rangle \langle v_j|) = \sum_i \lambda_i^2 |u_i\rangle \langle u_i|$$

13.2 Entropia Splątania

$$S(\rho_A) = - \sum_i \lambda_i^2 \log \lambda_i^2 = - \text{Tr}(\rho_A \log \rho_A) = S(\rho_B)$$

14 Kanały Kwantowe

Kanał kwantowy, to całkowicie dodatnie odwzorowanie liniowe, zachowujące ślad.

$$\varepsilon = \mathcal{B}(\mathcal{H}_A) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_B)$$

gdzie $\mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$ to przestrzeń operatorów w \mathcal{H}_A . Dowolne rozszerzenie odwzorowania $\varepsilon \otimes \mathbb{I}_n$ jest nieujemnie określone. Równocześnie, zachowuje ślad: $\text{Tr}[\varepsilon(\rho)] = \text{Tr}[\rho]$.

Stan układu dwóch kubitów $\rho_{AB} = \sum_{i,j,k,l} \rho_{ijkl} |i\rangle \langle j| \otimes |k\rangle \langle l|$ jest separowalny wtedy i tylko wtedy, gdy macierz powstała z transpozycji jednego z podukładów jest nieujemnie określona.

$$\rho_{AB}^T = \sum_{i,j,k,l} \rho_{ijkl} |i\rangle \langle j| \otimes |l\rangle \langle k|$$

14.1 Ślad częściowy

Gdy mamy układ złożony z AB , możemy chcieć opisać stan obserwowalny wyłącznie na podukładzie A lub B .

$$\text{Tr}_B : \mathcal{B}(\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B) \rightarrow \mathcal{B}(\mathcal{H}_A)$$

Dla dowolnej bazy ortonormalnej $\{|k\rangle\}$ przestrzeni \mathcal{H}_B

$$\text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \sum_k (I_A \otimes \langle k|_B) \rho_{AB} (I_A \otimes |k\rangle_B)$$

$$\text{Dla } \rho_{AB} = \rho_A \otimes \rho_B: \text{Tr}_B(\rho_{AB}) = \text{Tr}(\rho_B)\rho_A = \rho_A$$

Przykład 14.1

Dla stanu kwantowego dwóch kubitów:

$$\rho = |\psi\rangle\langle\psi| \quad |\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|00\rangle + |11\rangle)$$

chcemy znaleźć macierz gęstości jednego z układów.

$$\rho = \frac{1}{2}(|00\rangle + |11\rangle)(\langle 00| + \langle 11|) = \frac{1}{2}(|00\rangle\langle 00| + |00\rangle\langle 11| + |11\rangle\langle 00| + |11\rangle\langle 11|)$$

$$\rho = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(\rho_A)_{ij} = \sum_k \rho_{ik,jk} \quad (\rho_B)_{ij} = \sum_k \rho_{ki,kj}$$

$$(\rho_A)_{00} = \rho_{00,00} + \rho_{01,01} = \frac{1}{2}$$

$$(\rho_A)_{01} = \rho_{00,10} + \rho_{01,11} = 0$$

$$(\rho_A)_{10} = \rho_{10,00} + \rho_{11,01} = 0$$

$$(\rho_A)_{11} = \rho_{10,10} + \rho_{11,11} = \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \rho_A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon(\rho) = \text{Tr}_E(V_\rho V_\rho^\dagger)$$

Entropia splątania stanu czystego $|\psi\rangle_{AB}$ to:

$$E(|\psi\rangle_{AB}) = S(\rho_A) = S(\rho_B) \quad \rho_A = \text{Tr}_B(|\psi\rangle\langle\psi|)$$