

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Uporządkowana para liczb</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Grupa</b>	<b>2</b>
2.1	Grupa abelowa . . . . .	2
2.2	Przykłady grup . . . . .	2
<b>3</b>	<b>Pierścień</b>	<b>2</b>
3.1	Pierścień z jedynką . . . . .	2
3.2	Pierścień przemienny . . . . .	2
<b>4</b>	<b>Ciało</b>	<b>2</b>
<b>5</b>	<b>Homomorfizmy</b>	<b>2</b>
5.1	Homomorfizmy grupy . . . . .	2
5.2	Homomorfizmy pierścieni . . . . .	3
5.3	Jądro homomorfizmu . . . . .	3
5.4	Obraz homomorfizmu . . . . .	3
<b>6</b>	<b>Permutacje</b>	<b>3</b>
6.1	Rozkład na cykle . . . . .	3
6.2	Iloczyn transpozycji . . . . .	3
6.3	Postać macierzowa . . . . .	3
6.4	Znak permutacji . . . . .	3
<b>7</b>	<b>Macierze</b>	<b>3</b>
7.1	Macierz jednostkowa . . . . .	3
7.2	Macierz odwrotna . . . . .	4
7.3	Macierz transponowana . . . . .	4
7.4	Minory macierzy . . . . .	4
7.5	Wyznacznik Macierzy . . . . .	4
7.5.1	Tw. Laplace'a . . . . .	4
7.5.2	Własności . . . . .	4
7.5.3	Tw. Cauche'go . . . . .	4
7.6	Wzory Cramera . . . . .	5
7.7	Dopełnienie algebraiczne macierzy . . . . .	5
<b>8</b>	<b>Przestrzeń liniowa</b>	<b>5</b>
<b>9</b>	<b>Wektory</b>	<b>5</b>
9.1	Układ wektorów . . . . .	5
9.2	Kombinacja liniowa . . . . .	5
9.3	Rozpinanie . . . . .	6
9.4	Własności wektorów . . . . .	6
<b>10</b>	<b>Baza</b>	<b>6</b>
10.1	Macierz przejścia . . . . .	6
<b>11</b>	<b>Wrońskian</b>	<b>6</b>
<b>12</b>	<b>Przekształcenie liniowe</b>	<b>6</b>
12.1	Macierz przekształcenia liniowego . . . . .	6
<b>13</b>	<b>Wektory własne</b>	<b>7</b>
13.1	Macierz charakterystyczna . . . . .	7

## 1 Uporządkowana para liczb

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

## 2 Grupa

Grupa to uporządkowana para  $G(A, \circ)$ , gdzie  $A$  to zbiór, a  $\circ$  to działanie spełniające następujące warunki:

- Zachodzi łączność działania  $\forall a, b, c \in A : a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$
- Istnieje element neutralny  $e \in A : \forall a \in A : a \circ e = e \circ a = a$
- Dla każdego elementu istnieje element odwrotny  $\forall a \in A : \exists a^{-1} \in A : a \circ a^{-1} = a^{-1} \circ a = e$

### 2.1 Grupa abelowa

Grupa abelowa, to specjalny rodzaj grupy w którym spełniony jest dodatkowy warunek:

- Grupa jest przemienna  $\forall a, b \in A : a \circ b = b \circ a$

### 2.2 Przykłady grup

$$G(\mathbb{Z}, +), G(\mathbb{Q}, +), G(\mathbb{R}, +), G(\mathbb{C}, +)$$

## 3 Pierścień

Pierścień to uporządkowana trójka  $R(A, +, \cdot)$ , gdzie  $A$  to zbiór, a  $+$  i  $\cdot$  to działania spełniające następujące warunki:

- $(A, +)$  jest grupą abelową
- $+$  i  $\cdot$  są wewnętrzne dla  $A$
- Dla każdego  $a, b, c \in A$  zachodzi rozdzielność mnożenia względem dodawania:  $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$  oraz  $(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$
- Istnieje element neutralny mnożenia  $1 \in A : \forall a \in A : a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

### 3.1 Pierścień z jedyneką

Pierścień z jedyneką to pierścień, w którym istnieje element neutralny mnożenia oraz  $A \neq \emptyset$

### 3.2 Pierścień przemienny

Pierścień przemienny to pierścień, w którym mnożenie jest przemienna

## 4 Ciało

Ciało  $C(K, +, \cdot)$  to pierścień przemienny z jedyneką, oraz  $(K \setminus \{0\}, \cdot)$  jest grupą

## 5 Homomorfizmy

Homomorfizmy to odwzorowania  $f : A \rightarrow B$ , jeśli  $A$  i  $B$  spełniają dodatkowe warunki..

### 5.1 Homomorfizmy grupy

Jeśli  $(A, +_A)$  i  $(B, +_B)$  to grupy oraz

$$\forall a \in A, b \in B f(a +_A b) = f(a) +_B f(b)$$

## 5.2 Homomorfizmy pierścieni

Jeśli  $(A, +_A, \cdot_A)$  i  $(B, +_B, \cdot_B)$  to pierścienie oraz

$$\forall a \in A, b \in B f(a +_A b) = f(a) +_B f(b) \wedge f(a \cdot_A b) = f(a) \cdot_B f(b)$$

## 5.3 Jądro homomorfizmu

$$\ker f = \{a \in A : f(a) = 0_B\}$$

## 5.4 Obraz homomorfizmu

$$\operatorname{im} f = \{b \in B : \exists a \in A : f(a) = b\}$$

## 6 Permutacje

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 \\ a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

$$a_n = \pi(n)$$

### 6.1 Rozkład na cykle

$$\pi = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \cdots & a_n \\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & a_1 \end{pmatrix} = (a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$$

$$\pi' = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & b_1 & b_2 \\ a_2 & a_1 & b_2 & b_1 \end{pmatrix} = (a_1, a_2) \cdot (b_1, b_2)$$

### 6.2 Iloczyn transpozycji

$$(a_1, a_2, a_3, \dots, a_k) = (a_1, a_k) \cdot (a_1, a_{k-1}) \cdot \dots \cdot (a_1, a_3) \cdot (a_1, a_2)$$

### 6.3 Postać macierzowa

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

### 6.4 Znak permutacji

Ilość czynników w iloczynie transpozycji określa parzystość permutacji.

$$(-1)^n$$

gdzie  $n$  to ilość transpozycji

## 7 Macierze

### 7.1 Macierz jednostkowa

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

## 7.2 Macierz odwrotna

Macierz odwrotna do  $A$  to taka macierz  $B$ , że  $A \cdot B = B \cdot A = I$

## 7.3 Macierz transponowana

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & a_{3n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

## 7.4 Minory macierzy

$A_{ij}$  = macierz bez kolumny  $i$  oraz wierszu  $j$

## 7.5 Wyznacznik Macierzy

$$\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + \cdots + a_{1n} \cdot A_{1n}$$

Dla macierzy  $2 \times 2$

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Dla macierzy  $n \times n$

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \cdot a_{ij} \cdot A_{ij}$$

### 7.5.1 Tw. Laplace'a

$$\det A = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \text{ dla każdego } 1 \leq i \leq n$$

### 7.5.2 Własności

- Jeżeli macierz kwadratowa  $A$  ma wiersz lub kolumnę złożoną z samych zer to  $\det A = 0$
- Jeżeli macierz kwadratowa ma kolumnę lub wiersz pomnożoną przez skalar to wyznacznik też jest wielokrotnością skalara
- Jeżeli dwie macierze  $A$  i  $B$  kwadratowe różnią się od innej macierzy  $C$  tylko tą samą kolumną lub wierszem, który  $C$  jest sumą odpowiednich w  $A$  i  $B$  to  $\det C = \det A + \det B$
- Zamiana miejscami dwóch kolumn lub wierszy spowoduje zamienienie się znaku wyznacznika na przeciwny
- Jeżeli jedna kolumna lub wiersz jest wielokrotnością innego wiersza lub kolumny to wyznacznik jest równy 0
- Dodawanie wierszy i kolumn nie zmienia wyznacznika
- Wyznacznik macierzy górnotrójkątnej lub dolnotrójkątnej jest równy iloczynowi elementów na przekątnej

### 7.5.3 Tw. Cauche'go

$$\det AB = \det A \cdot \det B$$

## 7.6 Wzory Cramera

Dla zestawu równań liniowych

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Możemy przedstawić czynniki jako macierz

$$W = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

I zastępując kolumnę  $i$  kolumną wyrazów wolnych otrzymujemy

$$W_i = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i-1} & b_2 & a_{2i+1} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$x_i = \frac{W_i}{W}$$

## 7.7 Dopełnienie algebraiczne macierzy

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$$

## 8 Przestrzeń liniowa

Przestrzeń liniowa  $V$  nad ciałem  $K$  to zbiór  $V$  oraz działania  $+$  i  $\cdot$  spełniające następujące warunki:

- $(V, +, \theta)$  jest grupą abelową z elementem neutralnym  $\theta$
- Dla każdego  $\alpha, \beta \in K$  i  $v \in V$  zachodzi  $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha \cdot \beta) \cdot v$
- Dla każdego  $\alpha \in K$  i  $v, w \in V$  zachodzi  $\alpha \cdot (v + w) = \alpha \cdot v + \alpha \cdot w$
- $1 \cdot v = v$

## 9 Wektory

Wektor to element przestrzeni liniowej  $V$

### 9.1 Układ wektorów

Układ wektorów przestrzeni liniowej  $V$  o wskaźnikach ze zbioru  $T$  to funkcja  $v : T \rightarrow V$ . Wartość funkcji  $v$  w elemencie  $t$  oznaczamy  $v_t$ .

### 9.2 Kombinacja liniowa

Kombinacja liniowa wektorów  $v_1, v_2, \dots, v_n$  to wektor postaci

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

Zbiór wszystkich kombinacji liniowych nazywamy powłoką liniową układu

### 9.3 Rozpinanie

Wektory z układu wektorów rozpinają przestrzeń jeżeli każdy z wektorów należy do przestrzeni oraz jest kombinacją liniową wektorów układu, czyli można go wyrazić za pomocą innych wektorów.

Wektory są liniowo niezależne gdy ich kombinacja liniowa (L) jest równa  $\theta_v$  (wektor zerowy) lub maczyca tych wektorów ma  $\det \neq 0$  lub rząd maczyce wektorów = ilości wektorów

### 9.4 Własności wektorów

- Jeżeli wektory są liniowo zależne to jeden z nich jest kombinacją liniową pozostałych
- Jeżeli  $\theta_v$  jest kombinacją liniową wektorów to są liniowo zależne
- Kolumny macierzy  $A$  są wektorami liniowo zależnymi jeżeli  $AX = \theta$  ma rozwiązanie niezerowe ze względu na  $X$
- Jeżeli kolumny macierzy  $A$  to wektory liniowo niezależne to  $AX = \theta$  ma jedno rozwiązanie i  $\det A \neq 0$

## 10 Baza

Niezależny układ rozpinający przestrzeń  $V$  nazywamy bazą przestrzeni  $V$ . Jeżeli układ tworzący bazę jest skończony to mówimy że  $V$  ma bazę skończoną. Liczba elementów bazy  $S$  przestrzeni  $V$  nazywamy  $\dim V$  czyli wymiarem przestrzeni.

### 10.1 Macierz przejścia

Dla dwóch baz  $B_1 = (v_1, \dots, v_n), B_2 = (w_1, \dots, w_n)$  przestrzeni liniowej  $R_n$  oraz zależności  $v_n = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{nn}w_n$  to macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

jest macierzą przejścia między  $B_1$  i  $B_2$

## 11 Wrońskian

Macierz zawierająca pochodne  $n$  funkcji do  $m-1$  włącznie stopnia.

$$W_{11} = f_1(x), W_{12} = f_2(x), \dots, W_{1n} = f_n(x)$$

$$W_{21} = f'_1(x), W_{22} = f'_2(x), \dots, W_{2n} = f'_n(x)$$

Jeśli funkcje są liniowo zależne w przedziale  $(a, b)$  to ich wrońskian jest tożsamościowo równy zero. Jeżeli  $x_0 \in (a, b)$  i  $W(x_0) \neq 0$  to funkcje we wrońskianie są liniowo niezależne

## 12 Przekształcenie liniowe

Mówimy, że funkcja  $T : V \rightarrow W$  jest przekształceniem liniowym, jeżeli:

$$\forall v_1, v_2 \in V T(v_1 + v_2) = T(v_1) + T(v_2) \wedge T(\alpha \cdot v) = \alpha T(v)$$

Jeżeli  $V = W$ , to przekształcenie liniowe nazywamy operatorem liniowym przestrzeni.

### 12.1 Macierz przekształcenia liniowego

Dla dwóch baz  $B_v, B_w$  oraz  $T(v_n) = a_{1n}w_1 + a_{2n}w_2 + \dots + a_{mn}w_m$ . To macierz wymiaru  $m \times n$  to macierz przekształcenia  $T$  w bazach.

## 13 Wektory własne

Niezerowy wektor  $v$  nazywamy wektorem własnym macierzy  $A$  jeżeli istnieje skalar  $\lambda$  taki, że  $Av = \lambda v$ . W takiej konfiguracji  $\lambda$  nazywamy wartością własną macierzy  $A$  odpowiadającą wektorowi  $v$ .

### 13.1 Macierz charakterystyczna

Macierz  $A - tI_n$  o współczynnikach w pierścieniu wielomianów  $K[t]$  nazywamy macierzą charakterystyczną macierzy  $A$ . Równanie  $\det(A - tI_n) = 0$  nazywamy równaniem charakterystycznym macierzy.  $f_A(t) = \det(A - tI_n) = (-1)^n \det(A - tI_n) \in K[t]$  nazywamy wielomianem charakterystycznym macierzy.  $f_A(t) = (t - \lambda)^k g(t)$  nazywamy krotnością algebraiczną wartością własnej. Przestrzeń własna to zbiór wektorów własnych odpowiadającym wartościom własnym.

Ślad macierzy to  $\text{tr}A = a_{11} + a_{22} + \dots$ . Krotność geometryczna wartości własnej to rząd macierzy powstałej z wektora przestrzeni własnej danej wartości własnej, lub wymiar przestrzeni własnej.